1. i)

Wegen $P(A) = \sum_{A_i \in A} P(A_i)$ und $P(B) = \sum_{B_i \in B} P(B_i)$ ist

$$P(A \cup B) = \sum_{C_i \in A} P(C_i) + \sum_{C_i \in B} P(C_i) - 1 \cdot \underbrace{\sum_{C_i \in A, C_i \in B} P(C_i)}_{*} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Der Term * ist in den vorigen zwei Summanden zweimal addiert worden , daher nun einmal zu subtrahieren .

1. ii)

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B \cup C) \qquad \text{(nach Axiomen)}$$
$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) \qquad \text{(nach 1. ii))}$$

$$\Rightarrow P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$

2. i)

$B \backslash A = (A \cup B) \backslash A = (A \cup B) \cap A^C$

$= \left((A \cup B)^C \cup A\right)^C$ (letzter Schritte = de Morgansche Regel)

Nach Voraussetzung gilt : $A , B \in F$.

Nach der Definition von s -Alegbren gilt : $A \cup B \in F$ sowie $(A \cup B)^C \in F$.

Nach der Definition von s -Alegbren gilt $(A \cup B)^C \cup A \in F$ und somit auch $\left((A \cup B)^C \cup A\right)^C \in F$, was , wie oben gezeigt , äquivalent ist zu : $B \backslash A \in F$. **q.e.d.**

2. ii)

Es gilt : $A_i \cap A_j = (A_i \cup A_j) \setminus (A_i \setminus A_j \cup A_j \setminus A_i)$

Nach der Definition von s -Alegbren und mit Aufgabe 2. i) ist offensichtlich , dass :

$A_i, A_j \in F \Rightarrow A_i \cap A_j \in F$, und somit :

$A_1, A_2, ... \in F \Rightarrow \bigcap_i A_i \in F$ **q.e.d.**

3.)

$$H = -\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \log_2 P(A_i) =$$

Bei Gleichverteilung ist die Entropie (der mittlere Informationsgehalt) logischerweise am grössten , d.h.

$$\max H = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \log_2 \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \log_2 n = \log_2 n$$

Die Entropie ist am geringsten , je ungleichmässiger die Symbole verteilt sind , d.h. kommt nur ein Symbol vor , so gilt

$$\min H = \sum_{i=1}^{1} P(A_1) \log_2 P(A_1) = 1 \cdot 0 = 0$$

Somit wurde gezeigt , dass $0 \le H \le \log_2 n$ bzw. $0 \le H \le \log_2 |\Omega|$ gilt .

4.)

Das Markov-Modell erster Ordnung hat 256 Zustände .

Die Übergangswahrscheinlichkeiten anzugeben , erscheint mir bei 65536 Kombinationsmöglichkeiten zu umfangreich (selbst eine Speicherung in eine Datei ist sehr gross) , oder ich habe die Aufgabe missverstanden .

Die Zustandswahrscheinlichkeiten gibt das Program aus , ebenso die verschiedenen Entropien .

Hier kurze Auszüge aus dem Programm (ohne die Zustandswahrscheinlichkeiten) :

```
Dateiname : baboon.pgm
Markov-Modell 1.Ordnung :
Von 256 moeglichen Zustaenden sind 226 erreichbar.
Anzahl der verschiedenen auftretenden Zustandsuebergaenge = 22049

Entropie bei Verwendung des Markov-Modells 1.Ordnung : 0.096071
Entropie bei unterstellter Unabhaengigkeit der Pixel = 7.357885

-----------------------------------------------------------------------------

Dateiname : barbara.pgm
Markov-Modell 1.Ordnung :
Von 256 moeglichen Zustaenden sind 221 erreichbar.
Anzahl der verschiedenen auftretenden Zustandsuebergaenge = 26334

Entropie bei Verwendung des Markov-Modells 1.Ordnung : 0.083362
Entropie bei unterstellter Unabhaengigkeit der Pixel = 7.466381

-----------------------------------------------------------------------------

Dateiname : goldhill.pgm
Markov-Modell 1.Ordnung :
Von 256 moeglichen Zustaenden sind 220 erreichbar.
Anzahl der verschiedenen auftretenden Zustandsuebergaenge = 15562

Entropie bei Verwendung des Markov-Modells 1.Ordnung : 0.083030
Entropie bei unterstellter Unabhaengigkeit der Pixel = 7.477728

-----------------------------------------------------------------------------

Dateiname : lena512.pgm
Markov-Modell 1.Ordnung :
Von 256 moeglichen Zustaenden sind 215 erreichbar.
Anzahl der verschiedenen auftretenden Zustandsuebergaenge = 15689

Entropie bei Verwendung des Markov-Modells 1.Ordnung : 0.078824
Entropie bei unterstellter Unabhaengigkeit der Pixel = 7.445523

-----------------------------------------------------------------------------

Dateiname : peppers.pgm
Markov-Modell 1.Ordnung :
Von 256 moeglichen Zustaenden sind 230 erreichbar.
Anzahl der verschiedenen auftretenden Zustandsuebergaenge = 16668

Entropie bei Verwendung des Markov-Modells 1.Ordnung : 0.074885
Entropie bei unterstellter Unabhaengigkeit der Pixel = 7.571423
```