

Informatik 3 – Übung 10 – Georg Kuschik

10.1 a)

Primimplikanten von sk ($k > 0$):

$$\{x_{i_1} \dots x_{i_k} : x_{i_j} \in \{x_1, \dots, x_n\}, x_{i_r} \neq x_{i_s} \Leftrightarrow r \neq s\}$$

10.1 b)

Minimalpolynom:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = & \\ & x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_1x_6 + x_1x_7 + x_1x_8 + \\ & x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_2x_6 + x_2x_7 + x_2x_8 + \\ & x_3x_4 + x_3x_5 + x_3x_6 + x_3x_7 + x_3x_8 + \\ & x_4x_5 + x_4x_6 + x_4x_7 + x_4x_8 + \\ & x_5x_6 + x_5x_7 + x_5x_8 + \\ & x_6x_7 + x_6x_8 + \\ & x_7x_8 \end{aligned}$$

10.1 c)

Zur Minimalüberdeckung der Minterme werden alle Primimplikanten benötigt, daher ist das Minimalpolynom eindeutig.

10.2 a)

Angenommen, ein Primimplikant p enthält ein negatives Literal \bar{x}_i .

D.h. $p = p_1 \bar{x}_i$ mit: p_1 ist ein Monom, welches die Variable x_i nicht enthält.

Für jede Belegung $a = (a_1, \dots, a_n)$ gilt dann die logische Aussage

$$\Phi(p_1)(a) = 1$$

$$\Rightarrow \Phi(p_1 \bar{x}_i)(a) = 1 \text{ oder } \Phi(p_1 x_i)(a) = 1$$

(je nachdem, ob $a_i = 1$ oder $a_i = 0$)

Betrachte diese Fallunterscheidung:

Fall 1: $a_i = 1$

$$\Rightarrow f(a) = 1, \text{ da } p_1 \bar{x}_i \text{ ein Implikant von } f \text{ ist}$$

Fall 2: $a_i = 0$

$$\text{Substitution: } b := (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

$$\text{Wegen } \Phi(p_1 \bar{x}_i)(b) = 1 \text{ folgt } f(b) = 1$$

Weil $b \leq a$ und f nach Voraussetzung monoton steigend ist, folgt somit auch hier $f(a) = 1$.

D.h. aus $\Phi(p_1)(a) = 1$ folgt $f(a) = 1$.

D.h. p_1 ist ein Implikant von f .

Dies steht jedoch im Widerspruch dazu, dass $p_1 \bar{x}_i$ ein Primimplikant von f ist.

Also ist die Annahme falsch und somit wurde bewiesen, dass jeder Primimplikant einer monoton steigenden Booleschen Funktion nur positive Literale enthält.

10.2 b)

Da jeder kleinste Minterm von f nur von dem zugehörigen Primimplikanten überdeckt wird, muss f folglich alle Primimplikanten enthalten und ist somit eindeutig bestimmt.

Q.e.d.