Informatik 3 – Übung 11 – Georg Kuschk

11.1)

Setzt man in den Implikanten für jedes positive Literal eine 1, für jedes negative Literal eine 0
und für jedes nicht vorkommende Literal einen - , so schreiben sich die gegebenen Implikanten
10-1
000-
0-00
-110
0101
1100

Bildet man aus diesen gegebenen Implikanten die Minterme, erhält man für diese
0000
0001
0100
0101
0110
1001
1011
1100
1110

Aus diesen werden nun mit Hilfe des Quine/McCluskey-Verfahrens die Primimplikanten berechnet :

$L_0^{\{x_1,x_2,x_3,x_4\}}$
0000
0001
0100
0101
0110
1001
1100
1011
1110

Für L_1 ergeben sich folgende Implikanten :

$L_1^{\{x_1,x_2,x_3\}}$	$L_1^{\{x_1,x_2,x_4\}}$	$L_1^{\{x_1,x_3,x_4\}}$	$L_1^{\{x_2,x_3,x_4\}}$
000-	01-0	0-00	-001
010-	10-1	0-01	-100
	11-0		-110

Da alle Implikanten aus L_0 durch Implikanten aus L_1 überdeckt werden, gibt es in L_0 somit keine Primimplikanten.
$P_0 = \varnothing$

Für L_2 ergeben sich folgende Implikanten :

$L_2^{\{x_1,x_2\}}$	$L_2^{\{x_1,x_3\}}$	$L_2^{\{x_1,x_4\}}$	$L_2^{\{x_2,x_3\}}$	$L_2^{\{x_2,x_4\}}$	$L_2^{\{x_3,x_4\}}$
$\varnothing$	0-0-	$\varnothing$	$\varnothing$	-1-0	$\varnothing$

$\Rightarrow$ Folgende Implikanten aus L_1 werden nicht durch die Implikanten aus L_2 überdeckt :
{10-1 , -001} $= \{x_1 x_2' x_4 \ , \ x_2' x_3' x_4\} = P_1$ (= Primimplikanten)

$\Rightarrow P_2 =$ {0-0- , -1-0} $= \{x_1' x_3' \ , \ x_2 x_4'\}$

Die Menge P der berechneten Primimplikanten ist somit

$$P \quad = P_0 \cup P_1 \cup P_2 = \{x_1 x_2' x_4 \ , \ x_2' x_3' x_4 \ , \ x_1' x_3' \ , \ x_2 x_4'\}$$

Bestimmung der wesentlichen Primimplikanten mittels der Matrix-Überdeckung :

	0000	0001	0100	**0101**	**0110**	1001	**1011**	1100	1110
1.) 10-1						1	**1**		
2.) -001		1				1			
3.) 0-0-	1	1	1	**1**					
4.) -1-0			1		**1**			1	1

Die rot eingefärbten Primimplikanten (1,3,4) sind wesentlich.
Der 2. Primimplikant wird vom 1. und 3. gemeinsam überdeckt.

$\Rightarrow$ Die wesentlichen Primimplikanten $\{x_1 x_2' x_4 \ , \ x_1' x_3' \ , \ x_2 x_4'\}$ reichen aus, um die Funktion f zu beschreiben.
Die Gesamtkosten sind hierbei minimal.

11.2)

$$a + b = (4x_3 + 2x_2 + x_1) + (4x_6 + 2x_5 + x_4)$$

Erläuterungen zur Schreibweise :

Die Implikanten, welche in $L_0^{\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}}$ enthalten sind, wurden wiefolgt codiert :

Die Implikanten entsprechen der Summe von a und b.

Die einzelnen Bits wurden entsprechend der Bitwertigkeiten, die sie in a bzw. b besitzen hintereinander geschrieben.

D.h. z.B. lautet der entsprechende Implikant

für $a = 7_{(dezimal)} = 111_{(binär)}$ und $b = 2_{(dezimal)} = 010_{(binär)}$: $111\,010$

Der Übersicht wegen noch folgende Umbenennungen :

$x_3 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_1 = y_3$, $x_6 = y_4$, $x_5 = y_5$, $x_4 = y_6$

$\Rightarrow$

$L_0^{\{x_3, x_2, x_1, x_6, x_5, x_4\}} = L_0^{\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}}$:

<u>100100</u> = a+b = 4+4
010110 = a+b = 2+6
100110 = a+b = 4+6
100101 = 4+5
101100 = 5+4
110100 = 6+4
<u>110010</u> ...
001111
010111
100111
011110
101110
110110
011101
101101
110101
111100
101011
110011
111010
<u>111001</u>
011111
101111
110111
111110
111101
<u>111011</u>
111111

Für L_1 ergeben sich folgende Implikanten :

$L_1^{\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}}$:	$L_1^{\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_6\}}$:	$L_1^{\{y_1,y_2,y_3,y_5,y_6\}}$:	$L_1^{\{y_1,y_2,y_4,y_5,y_6\}}$:	$L_1^{\{y_1,y_3,y_4,y_5,y_6\}}$:	$L_1^{\{y_2,y_3,y_4,y_5,y_6\}}$:
10010-	1001-0	110-10	10-100	1-0100	-10110
01011-	1001-1	101-11	01-110	1-0101	-01111
10011-	1011-0	110-11	10-101	1-0110	-10111
10110-	1101-0	111-01	10-110	1-1100	-11101
11001-	0111-1	111-10	11-010	0-1111	-11110
01111-	1011-1	111-11	11-100	1-0111	-11111
10111-	1101-1		01-111	1-1011	
11010-	1110-1		10-111	1-1101	
11011-	1111-0		11-011	1-1110	
11101-	1111-1		11-101	1-1111	
11110-			11-110		
11111-			11-111		

Da alle Implikanten aus L_0 durch Implikanten aus L_1 überdeckt werden, gibt es in L_0 somit keine Primimplikanten.

$P_0 = \varnothing$

Für L_2 ergeben sich folgende Implikanten :

$\binom{6}{4} = 15$ Möglichkeiten eine 4-elementige Teilmenge aus einer 6-elementigen Menge auszuwählen :

$L_2^{\{y_3,y_4,y_5,y_6\}}$	$L_2^{\{y_2,y_4,y_5,y_6\}}$	$L_2^{\{y_2,y_3,y_5,y_6\}}$	$L_2^{\{y_2,y_3,y_4,y_6\}}$	$L_2^{\{y_2,y_3,y_4,y_5\}}$	$L_2^{\{y_1,y_4,y_5,y_6\}}$	$L_2^{\{y_1,y_3,y_5,y_6\}}$	$L_2^{\{y_1,y_3,y_4,y_6\}}$
--1111	-1-110	$\varnothing$	-111-1	-1011-	1--100	1-1-11	1-01-0
	-1-111			-1111-	1--101		1-01-1
					1--110		1-11-0
					1--111		1-11-1

$L_2^{\{y_1,y_3,y_4,y_5\}}$	$L_2^{\{y_1,y_2,y_5,y_6\}}$	$L_2^{\{y_1,y_2,y_4,y_6\}}$	$L_2^{\{y_1,y_2,y_4,y_5\}}$	$L_2^{\{y_1,y_2,y_3,y_6\}}$	$L_2^{\{y_1,y_2,y_3,y_5\}}$	$L_2^{\{y_1,y_2,y_3,y_4\}}$	
1-010-	11--10	10-1-0	10-10-	111--1	110-1-	1001--	
1-011-	11--11	10-1-1	01-11-		111-1-	1011--	
1-110-		11-1-0	10-11-			1101--	
1-111-		11-1-1	11-01-			1111--	
			11-10-				
			11-11-				

$\Rightarrow$ Alle Implikanten aus L_1 werden durch Implikanten aus L_2 überdeckt, d.h. auch in L_1 sind keine Primimplikanten vorhanden.

$P_1 = \varnothing$

Für L_3 ergeben sich folgende Implikanten :

$L_3^{\{y_1,y_4,y_5\}}$	$L_3^{\{y_1,y_4,y_6\}}$	$L_3^{\{y_1,y_2,y_5\}}$	$L_3^{\{y_2,y_4,y_5\}}$	$L_3^{\{y_1,y_3,y_4\}}$	$L_3^{\{y_1,y_2,y_4\}}$
1--10-	1--1-0	11--1-	-1-11-	1-01--	10-1--
1--11-	1--1-1			1-11--	11-1--

Für die restlichen 3-elementigen Mengen gilt : $L_3^{U_i} = \varnothing$.

$\Rightarrow$ Folgende Implikanten aus L_2 werden nicht durch die Implikanten aus L_3 überdeckt :
{--1111 , -111-1 , 1-1-11 und 111--1} $= \{y_3 y_4 y_5 y_6\ ,\ y_2 y_3 y_4 y_6\ ,\ y_1 y_3 y_5 y_6\ ,\ y_1 y_2 y_3 y_6\} = P_2$
(= Primimplikanten)

In L_4 ist lediglich ein Implikant enthalten :

$L_4^{\{y_1, y_4\}}$
1--1--

Für die restlichen 2-elementigen Mengen gilt : $L_2^{U_i} = \varnothing$.

$\Rightarrow$ Folgende Implikanten aus L_3 werden nicht durch den Implikanten aus L_4 überdeckt :
{11--1- , -1-11-} $= \{y_1 y_2 y_5\ ,\ y_2 y_4 y_5\} = P_3$

$\Rightarrow P_3 = \{1\text{--}1\text{--}\} = \{y_1 y_4\}$

Die Menge P der berechneten Primimplikanten ist somit

$$\begin{aligned} P &= P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \\ &= \{y_3 y_4 y_5 y_6\ ,\ y_2 y_3 y_4 y_6\ ,\ y_1 y_3 y_5 y_6\ ,\ y_1 y_2 y_3 y_6,\ y_1 y_2 y_5\ ,\ y_2 y_4 y_5\ ,\ y_1 y_4\} \end{aligned}$$

bzw. nachdem die Umbennenung wieder rückgängig gemacht wurde :

Menge der Primimplikanten :

$$\underline{P = \{x_1 x_4 x_5 x_6, x_1 x_2 x_4 x_6, x_1 x_3 x_4 x_5, x_1 x_2 x_3 x_4\ ,\ x_2 x_3 x_5, x_2 x_5 x_6\ ,\ x_3 x_6\}}$$

Für die Bestimmung der wesentlichen Primimplikanten wird die y_i -Schreibweise jedoch noch beibehalten.

<u>Bestimmung der wesentlichen Primimplikanten mittels der Matrix-Überdeckung :</u>

	100100	010110	100110	100101	101100	110100	110010	001111	010111	100111	011110	101110	110110	011101	101101	110101	111100	101011	110011	111010	111001	011111	101111	110111	111110	111101	111011	111111
--1111								1														1	1					1
-111-1														1								1				1		1
1-1-11																		1					1				1	1
111--1																					1						1	1
11—1-							1						1						1	1				1	1		1	1
-1-11-		1							1		1		1									1		1	1			1
1--1--	1		1	1	1	1				1		1	1		1	1	1						1	1	1	1		1

Anhand der rot eingefärbten Spalten ist offensichtlich, dass alle Primimplikanten wesentlich sind.

$\Rightarrow f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1 x_4 x_5 x_6 \vee x_1 x_2 x_4 x_6 \vee x_1 x_3 x_4 x_5 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 \vee x_2 x_3 x_5 \vee x_2 x_5 x_6 \vee x_3 x_6$

Dies ist also die billigste Realisierung von f .