Institut für Informatik
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Prof. Dr. L. Staiger
Dr. R. Winter
Dipl.-Math. R. Mazala

D–06120 HALLE (Saale)
Von-Seckendorff-Platz 1
Tel. 0345/55 24714
Tel. 0345/55 24738
Tel. 0345/55 24736

11. Übung zur Vorlesung „Informatik IV"

Sommersemester 2003 1.7.2003

Abgabe: Dienstag, den 8.7.2003 vor der Vorlesung

Hinweis zu den bewerteten Aufgaben:
Alle Aussagen (in sämtlichen Lösungen) sind zu begründen bzw. zu beweisen.
Turing-Programme sind ausführlich zu dokumentieren.

Aufgabe 11.1: (2+2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind:

(a) die Signum-Funktion $\mathrm{sgn} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$\mathrm{sgn}(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) die modifizierte Differenz $\mathrm{diff} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$\mathrm{diff}(m, n) = \begin{cases} 0, & m < n \\ m - n, & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 11.2: (2+2 Punkte)

Beweisen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind:

(a) $mult(n, m) = n * m$

(b) $pot(k, n) = k^n$ für $n, k \in N$ mit $k > 0$

Aufgabe 11.3: (3+3 Punkte)

Beweisen Sie, dass die folgenden Funktionen partiell rekursiv sind:

(a) $\varphi(n) = \begin{cases} n/7, & falls\ n\ durch\ 7\ teilbar \\ nicht\ definiert, & sonst \end{cases}$

(b) $ganzwurz(n) = \begin{cases} \sqrt{n}, & falls\ n\ Quadratzahl \\ nicht\ definiert, & sonst \end{cases}$

Aufgabe 11.4: (3+3 Punkte)

(a) Es seien L_1 und L_2 Sprachen über X. Dann heißt L_1 auf L_2 reduzierbar (Schreibweise: $L_1 \leq L_2$), wenn es eine überall definierte, Turing-berechenbare Funktion $f\colon X^* \to X^*$ gibt, sodass gilt: $\forall w (w \in X^*\colon w \in L_1 \leftrightarrow f(w) \in L_2)$.

Beweisen Sie folgendes Lemma:
Gilt $L_1 \leq L_2$ und L_2 ist T-entscheidbar, dann ist L_1 T-entscheidbar.
(Umgekehrt gilt: Falls $L_1 \leq L_2$ und L_1 ist nicht T-entscheidbar, so ist auch L_2 nicht T-entscheidbar.)

(b) Bekannt sei:
Die Menge $H_s = \{i\colon \mathcal{T}_i$ hält auf der Eingabe $i\}$ (spezielles Halteproblem für Turingmaschinen, $\mathcal{T}_i$ ist die durch das Programm i definierte Turingmaschine) ist nicht T-entscheidbar.
Beweisen Sie mit Hilfe des obigen Lemmas:
$H = \{(i, w)\colon \mathcal{T}_i$ hält auf Eingabe $w\}$ ist nicht T-entscheidbar.

Selbsttestaufgaben - unbewertet

Aufgabe 11.5: (0 Punkte)

Schreiben Sie ein Turing-Programm zur Berechnung der Nachfolgerfunktion $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $s(n) = n + 1$.

Aufgabe 11.6: (0 Punkte)

Schreiben Sie ein Turing-Programm zur Berechnung der
konstanten Funktion $c_i^{(n)}(x_1, x_2, ..., x_n) = i$ (i beliebig, fest, $i \in \mathbb{N}$).

Aufgabe 11.7: (0 Punkte)

Geben Sie ein Turing-Programm zur Berechnung der
j-ten Projektionsfunktion $pr_j^{(n)}(x_1, x_2, ..., x_n)$ (j, n beliebig, fest, $1 \leq j \leq n$) an.

Aufgabe 11.8: (0 Punkte)

Gegeben sei die Ackermann-Funktion $a: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit
$a(0, m) = m + 1$, $a(n + 1, 0) = a(n, 1)$ und $a(n + 1, m + 1) = a(n, a(n + 1, m))$.
Berechnen Sie die Funktionswerte $a(3, 3)$ und $a(2, 10)$.

Email: {`staiger,winter,mazala`}`@informatik.uni-halle.de`