Definition 1.1 *Ein Quintupel $\mathcal{A} = (X, Z, z_0, \delta, Z_f)$ heißt* nichtdeterministischer endlicher Automat *(NEA)*:$\Leftrightarrow$

1. *X, Z sind endliche nichtleere Mengen.*
2. $z_0 \in Z$
3. $Z_f \subseteq Z$
4. $\delta \subseteq Z \times X \times Z$

Bemerkung: Ein Automat $\mathcal{A}$ heißt *deterministisch*, falls es zu jedem Paar $(z, x) \in Z \times X$ **höchstens** ein $z' \in Z$ mit $(z, x, z') \in \delta$ gibt, und $\mathcal{A}$ heißt *vollständig*, falls es zu jedem Paar $(z, x) \in Z \times X$ **mindestens** ein $z' \in Z$ mit $(z, x, z') \in \delta$ gibt.

Schreibweise: $\mathcal{A} : z \xrightarrow{w} z'$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A} : z \xrightarrow{e} z \\
&\mathcal{A} : z \xrightarrow{x} z' \quad :\Longleftrightarrow \quad (z, x, z') \in \delta \\
&\mathcal{A} : z \xrightarrow{wx} z' \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists z''(z'' \in Z \wedge \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad z \xrightarrow{w} z'' \wedge (z'', x, z') \in \delta)
\end{aligned}$$

Definition 1.2 $L_{\mathcal{A}} := \{w : \exists z(z \in Z_F \wedge \mathcal{A} : z_0 \xrightarrow{w} z)\}$

ist die von $\mathcal{A}$ *akzeptierte Sprache*.

Lemma 1.1
Die Klasse $\mathcal{L}_{\mathrm{FA}}^{(X)} := \{L_{\mathcal{A}} : L_{\mathcal{A}} \subseteq X^* \wedge \mathcal{A}$ ist NEA$\}$ ist abgeschlossen unter den Operationen $\cap, \cup, \cdot$ und *.

Definition 1.3 *Ein DEA ist ein Quintupel $\mathcal{A} = (X, Z, z_0, f, Z_f)$, wobei*

1. *X, Z endliche nichtleere Mengen sind,*
2. $z_0 \in Z$,
3. $Z_f \subseteq Z$, *und*
4. $f :\subseteq Z \times X \to Z$.

Satz 1.2 (Potenzmengenkonstruktion)
Zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A} = (X, Z, z_0, \delta, Z_f)$ gibt es einen DEA $\mathcal{B} = (X, S, s_0, f, S_f)$ mit $L_{\mathcal{A}} = L_{\mathcal{B}}$.

Konstruktion:

1. $S := 2^Z = \{Z' : Z' \subseteq Z\}$ (Potenzmenge !)
2. $s_0 := \{z_0\}$
3. $S_f := \{Z' : Z' \cap Z_f \neq \emptyset\}$
4. $f(Z', x) := \{z' : \exists z(z \in Z' \wedge (z, x, z') \in Z')\}$

Vereinbarung:
Für $\mathcal{A} = (X, Z, z_0, \delta, Z_f)$ sei $\mathcal{A}_z := (X, Z, z, \delta, Z_f)$.

Definition 1.4 *Es sei $\mathcal{A} = (X, Z, z_0, \delta, Z_f)$ ein NEA. Zwei Zustände $z, z' \in Z$ heißen* äquivalent *(*ununterscheidbar*)*

$$:\Longleftrightarrow \ \forall w (w \in X^* \rightarrow (w \in L_{\mathcal{A}_z} \longleftrightarrow w \in L_{\mathcal{A}_{z'}}))\ .$$

Definition 1.5 *Für einen DEA $\mathcal{A} = (X, Z, z_0, f, Z_f)$ heißt $w \in X^*$ ein die Zustände z und z'* unterscheidendes Experiment

$$:\Longleftrightarrow \ f(z, w) \in Z_f \longleftrightarrow f(z', w) \notin Z_f\ .$$

Entscheidungsprobleme für Sprachen $L \subseteq X^*$

Gegeben seien Sprachen $L_1, L_2 \subseteq X^*$. Gesucht sind Algorithmen, die Antworten auf die folgenden Fragen geben:

1. „$L = \emptyset$?“ (Leerheitsproblem)
2. „$L = X^*$?“
3. Ist L endlich? (Endlichkeitsproblem)
4. Hat L genau n Elemente?
5. „$L_1 \subseteq L_2$?“ (Inklusionsproblem)
6. „$L_1 = L_2$?“ (Gleichheitsproblem)
7. „$L_1 \cap L_2 = \emptyset$?“ (Disjunktheitsproblem)

Definition 3.1 *Ein Sextupel $\mathcal{M} = (X, Y, Z, z_0, f, g)$ heißt* verallgemeinert sequentielle Madchine *(gsm)*:$\Leftrightarrow$

1. *(X, Z, z_0, f, Z) ist ein DEA.*
2. *Y ist eine endliche Menge.*
3. *$g : Z \times X \rightarrow Y^*$*

Ausdehnung von g auf $Z \times X^*$:

$$\begin{aligned} g(z, e) &:= e \\ g(z, wx) &:= g(z, w) \cdot g(f(z, w), x) \end{aligned}$$

Satz 3.1 *Es sei $\varphi : X^* \rightarrow Y^*$ sequentielle Funktion. Dann gelten:*

1. *$\varphi(e) = e$*
2. *φ ist* präfixtreu, *d.h. aus $w \sqsubseteq v$ folgt $\varphi(w) \sqsubseteq \varphi(v)$.*
3. *φ ist* linear beschränkt, *d.h. $|\varphi(wx)| - |\varphi(w)| \leq c_\varphi$.*
4. *φ^{-1} ist* regularitätserhaltend, *d.h. $\varphi^{-1}(L) \subseteq X^*$ ist regulär, falls $L \subseteq Y^*$ regulär ist.*
5. *φ ist* regularitätserhaltend, *d.h. $\varphi^{-1}(W) \subseteq Y^*$ ist regulär, falls $W \subseteq X^*$ regulär ist.*

Definition 4.1 *Ein Quadrupel $G = (N, X, S, P)$ heißt* kontext-freie Grammatik *(CFG)*:$\Leftrightarrow$

1. *N, X sind endliche Mengen.*
2. *$N \cap X = \emptyset$*
3. *$S \in N$*
4. *P ist endliche Teilmenge von $N \times (N \cup X)^*$*

Schreibweise:
Für $(A, w) \in P$ schreiben wir auch $A \rightarrow_G w$.

Chomsky-Normalform (Konstruktion)

Wir setzen $X_\alpha := \begin{cases} X_\alpha \text{ , falls } \alpha \in X \\ \alpha \quad , \alpha \in N \text{ .} \end{cases}$

Die Regeln der neuen Grammatik $G' = (N', X, S, P')$ entstehen aus denen der alten $G = (N, X, S, P)$ (ohne e- und Kettenregeln) wie folgt:

Dabei sei

$$N' := N \cup \{X_x : x \in X\} \cup \{[v] : v \in (N \cup X)^* \wedge |v| \leq \max_{A \rightarrow w \in P} |w|\}$$

alt	$\rightsquigarrow$	neu	Bedingung
$S \rightarrow e$	$\rightsquigarrow$	$S \rightarrow e$	$S \rightarrow e \in P$
		$X_a \rightarrow a$	$a \in X$
		$A \rightarrow v$	$v \in X$
$A \rightarrow v$	$\rightsquigarrow$	$A \rightarrow X_x X_y$	$v = xy\,, x, y \in N \cup X$
		$A \rightarrow X_x[u]$	$v = xu\,, x \in N \cup X, \lvert u\rvert \geq 2$
		$[xy] \rightarrow X_x X_y$	$v = xy\,, x, y \in N \cup X$
		$[xu] \rightarrow X_x[u]$	$v = xu\,, x \in N \cup X, \lvert u\rvert \geq 2$

Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus

$G = (N, X, S, P)$ kontextfrei in CNF, $\quad w = a_1 \cdots a_n$

$N_{ij} = \{A : A \vdash_G^* a_i \cdots a_j\}$, „$w \in L_G \leftrightarrow S \in N_{1n}$“

for $i := 1$ **to** n **do** $N_{ii} := \{A : (A, a_i) \in P\}$ **endfor**
for $d := 1$ **to** $n - 1$ **do**
  for $i := 1$ **to** $n - d$ **do**
    $j := i + d$
    $N_{ij} := \left\{A : \exists (A, BC) \in P \underbrace{\exists k\!: B \in N_{ik} \wedge C \in N_{(k+1)j}}_{\text{Suche des geeigneten } k}\right\}$
  endfor
endfor

Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus (Beispiel)

	1	2	3	4	5	6
1	S	$\emptyset$	S	$\emptyset$	$\emptyset$	S
2		B	A, B	B	B	A, B
3			S	$\emptyset$	$\emptyset$	S
4				B	B	A, B
5					B	A, B
6						S
	a	b	a	c	b	a

Grammatik

$S \to SA \mid a$

$A \to BS$

$B \to BB \mid BS \mid b \mid c$

$$N_{ij} = \bigcup_{k=i}^{j-1} N_{ik} \star_G N_{k+1,j}$$

Definition 5.1 *Ein Septupel* $\mathcal{A} = (X, \Gamma, Z, z_0, \gamma_0, \delta, Z_f)$ *heißt* nichtdeterministischer Kellerautomat *(PDA)*:$\Leftrightarrow$

1. *X, Γ, Z sind endliche nichtleere Mengen.*
2. $z_0 \in Z, \gamma_0 \in \Gamma$
3. $Z_f \subseteq Z$
4. *δ ist endliche Teilmenge von* $Z \times (X \cup \{e\}) \times \Gamma \times \Gamma^* \times Z$.

Nachfolgekonfiguration:

$(z, uw, \alpha\gamma) \vdash_{\mathcal{A}} (z', w, \beta\gamma)$, falls $(z, u, \alpha, \beta, z') \in \delta$

Definition 5.2 *Ein Septupel* $\mathcal{A} = (X, \Gamma, Z, z_0, \gamma_0, f, Z_f)$ *heißt* deterministischer Kellerautomat *(PDA)*:$\Leftrightarrow$

1. *X, Γ, Z sind endliche nichtleere Mengen.*
2. $z_0 \in Z, \gamma_0 \in \Gamma$
3. $Z_f \subseteq Z$
4. $f : Z \times (X \cup \{e\}) \times \Gamma \xrightarrow{\text{aus}} \Gamma^* \times Z$ *ist partielle Funktion mit der Eigenschaft:*
   Ist $f(z, e, \alpha)$ definiert, so ist $f(z, x, \alpha)$ für alle $x \in X$ ***nicht*** *definiert.*

Ein Beispiel

$\mathcal{A} = (X, \Gamma, Z, z_0, \gamma_0, \delta, Z_f)$

$$\begin{aligned} \delta :\ & (z_0, a, \gamma_0, a\gamma_0, z_0) \\ & (z_0, a, a, aa, z_0) \\ & (z_0, b, a, e, z_1) \\ & (z_1, b, a, e, z_1) \\ & (z_1, e, \gamma_0, e, z_f) \end{aligned}$$

$(z_0, aabb, \gamma_0) \vdash (z_0, abb, a\gamma_0) \vdash (z_0, bb, aa\gamma_0) \vdash (z_1, b, a\gamma_0) \vdash (z_1, e, \gamma_0) \vdash (z_f, e, e)$

$(z_0, aba, \gamma_0) \vdash (z_0, ba, a\gamma_0) \vdash (z_1, a, \gamma_0) \vdash (z_f, a, e)$

Pumping-Lemma für kontextfreie Grammatiken

Lemma 6.1 *Es sei* $G = (N, X, S, P)$ *eine kontextfreie Grammatik ohne Regeln der Form* $A \to B$ *und* $A \to e$ *und es seien* $m := |N|$ *und* $k := \max\{|w| : A \to w \in P\}$.

Ist $\bar{w} \in L_G, |\bar{w}| > k^{m+1}$, *so gibt es eine Zerlegung* $\bar{w} = u\mathbf{v}w\mathbf{x}y$ *derart, daß* $\mathbf{vx} \neq e$, $|\mathbf{v}w\mathbf{x}| \leq k^{m+1}$ *und* $\forall i \in \mathbb{N} : u\mathbf{v}^i w\mathbf{x}^i y \in L_G$.

Beispiel und Anwendung

$$G : S \to AC|a,\ A \to BS|b,\ B \to b,\ C \to BS$$

Lemma 6.2

1. *Die Sprache* $L = \{a^i b^i c^i : i \in \mathbb{N}\}$ *ist nicht kontextfrei.*
2. *Die Klasse der (deterministisch) kontextfreien Sprachen ist nicht abgeschlossen unter Durchschnittbildung.*

Folgerung 6.3 *Sind* $L_1, L_2 \subseteq X^*$ *kontextfreie Sprachen, so sind auch* $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cdot L_2$ *und* L_1^* *kontextfrei.*

Lemma 6.4 *Ist* $L \subseteq X^*$ *eine (deterministisch) kontextfreie Sprache und ist* $W \subseteq X^*$ *eine reguläre Sprache, so is* $L \cap W$ *ebenfalls (deterministisch) kontextfrei.*

Lemma 6.5 *Ist* $L \subseteq X^*$ *eine deterministisch kontextfreie Sprache, so is* $X^* \setminus L$ *ebenfalls deterministisch kontextfrei.*