Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. M. Arnold, B. Burgermeister
Wintersemester 2005/2006

Numerische Mathematik II

9. Übungsblatt, Abgabe am 14.12.2005

`http://sim.mathematik.uni-halle.de/~arnold/courses/SoS05.num/`

Aufgabe 1. (4 Punkte) *Unsere eigene Quadraturformel*

Konstruieren Sie eine Quadraturformel der Form

$$\tilde{I}(f) = w_0 f(-2/3) + w_1 f(0) + w_2 f(2/3),$$

die das Integral $\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t$ approximiert und für Polynome möglichst hoher Ordnung exakt ist.

Berechnen Sie mit dieser Quadraturformel und mit der Keplerschen Fassregel Näherungen für $\int_{-1}^{1}(\sin(\pi t))^2\mathrm{d}t$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem exakten Wert 1.

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Integration mit Hermite-Interpolation*

Sei $f \in C^6[-1,1]$ und $P \in \Pi_5$ Lösung der Hermiteschen Interpolationsaufgabe $P(t_i) = f(t_i)$, $P'(t_i) = f'(t_i),\ t_0 = -1, t_1 = 0, t_2 = 1$.

a) Zeigen Sie

$$\int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t = \frac{7}{15}f(-1) + \frac{16}{15}f(0) + \frac{7}{15}f(1) + \frac{1}{15}f'(-1) - \frac{1}{15}f'(1)$$

b) Diese Integrationsregel ist für alle Polynome $p \in \Pi_5$ exakt. Zeigen Sie, dass sie nicht mehr für alle $p \in \Pi_6$ exakt ist.

c) Leiten Sie mit Hilfe der Restgliedformel für die Polynominterpolation eine obere Schranke des Approximationsfehlers für die Integrationsregel aus a) ab.

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Newton-Cotes-Formeln*

Die n-te Newton-Cotes-Formel ist so konstruiert, dass sie für alle Polynome vom Grad $\leq n$ den exakten Integralwert liefert. Zeigen Sie, dass für gerades n sogar alle Polynome vom Grad $n+1$ exakt integriert werden.

Hinweis: Betrachte den Integranden t^{2k+1} auf $[-k,k]$, verwende die Restgliedformel der Polynominterpolation und nutze die Symmetrie bzgl. $(a+b)/2 = 0$ aus.

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Programmieraufgabe: Zusammengesetzte Quadraturformeln*

Berechnen Sie mit der zusammengesetzten Trapezregel, der Simpsonregel und der zusammengesetzten 3/8-Regel Näherungen für das Integral $\int_0^1 \sin(\pi t)\mathrm{d}t$. Unterteilen Sie dazu das Intervall $[0,1]$ in $n = 1,\ldots,10$ Teilintervalle und wenden Sie die Trapezregel, Fassregel bzw. 3/8-Regel auf jedes Teilintervall an.

Stellen Sie den Fehler abhängig von der Schrittweite grafisch dar.

Abgabe der Programmieraufgabe per eMail an `burgermeister@mathematik.uni-halle.de`.