Numerik 2 – Übung12 – Georg Kuschk

1.a)

Nullstellen von $f(x) = 2x + \ln\left(1 + e^{x}\right)$

1.) $x = j(x) = -\dfrac{\ln\left(1+e^{x}\right)}{2}$

$$\left|j'(x)\right| = \left| -\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{x}}{\underbrace{1+e^{x}}_{<1}} \right| < \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ kontrahierend auf ganz R

2.) $x = j(x) = -x - \ln\left(1+e^{x}\right)$

$$\left|j'(x)\right| = \left| -1 - \frac{e^{x}}{1+e^{x}} \right| > 1$$

$\Rightarrow$ nicht kontrahierend

3.) $-2x = \ln\left(1+e^{x}\right)$

$e^{-2x} = 1 + e^{x}$

$x = j(x) = \ln\left(e^{-2x} - 1\right)$

$$\left|j'(x)\right| = \left| \frac{-2e^{-2x}}{e^{-2x} - 1} \right| \quad \in R^{+}$$

1.b)

$j : R \to R$ kontrahierend mit $a = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ j hat genau einen Fixpunkt x^{*} und x^{*} ist nicht die einzige Lösung von $f(x) = 0$.

1.c)

$$\left|x_n - x^{*}\right| = \frac{a^{n}}{1-a} \cdot \left|x_1 - x_0\right|$$

(Konvergenzverhalten / Stellengenauigkeit aus dem ersten Iterationsschritt bestimmen)

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{\frac{1}{2}} \cdot \left| -\frac{1}{2}\ln 2 - 0 \right|$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \ln 2 \le 10^{-3} \ln 2$$

$\Rightarrow$ ab $n = 10$ erfüllt

2.)

Δ^2 - Methode von Aitken (sieh Bem. 9.7.c) - quadratische Konvergenz statt linearer

$$\begin{aligned}
\Delta x_i &= x_{i+1} - x_i \\
\Delta^2 x_i &= \Delta x_{i+1} - \Delta x_i \\
&= x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{x}_i &= x_i - \frac{(\Delta x_i)^2}{\Delta^2 x_i} \\
&= x_i - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i} \\
&= x_i - \frac{\left(\left(x_{i+1} - x^*\right) - \left(x_i - x^*\right)\right)^2}{\left(x_{i+2} - x^*\right) - 2\left(x_{i+1} - x^*\right) + \left(x_i - x^*\right)} \\
&= x_i - \frac{\left((a + d_i) \cdot \left(x_i - x^*\right) - \left(x_i - x^*\right)\right)^2}{\left((a + d_{i+1}) \cdot (a + d_i) - 2(a + d_i) + 1\right) \cdot \left(x_{i+1} - x^*\right)} \\
&= x_i - \frac{(a + d_i - 1)^2 - \left(x_i - x^*\right)}{(a + d_{i+1}) \cdot (a + d_i) - 2(a + d_i) + 1}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\overline{x}_i - x^*}{x_i - x^*} = 1 - \frac{(a + d_i - 1)^2}{(a + d_{i+1}) \cdot (a + d_i) - 2(a + d_i) + 1} \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} \frac{(a - 1)^2}{a^2 - 2a + 1} = 0$$

3.a)

$$
\begin{aligned}
f(x^*) &= f\left(x + \left(x^* - x\right)\right) \\
&= f(x) + \left(x^* - x\right)\cdot f'(x) + \frac{1}{2}\left(x^* - x\right)^2 \cdot f''(x) + \left(x^* - x\right)^3 \cdot R \\
&= f(x) - \left(x - x^*\right)\cdot f'(x) + \frac{1}{2}\left(x - x^*\right)^2 \cdot f''(x) - \left(x - x^*\right)^3 \cdot R
\end{aligned}
$$

mit $\left|R\right| < M$ für $x \to x^*$

$$\Rightarrow f = \left(x - x^*\right)\cdot f' - \frac{1}{2}\left(x - x^*\right)^2 \cdot f'' + \left(x - x^*\right)^3 \cdot R \qquad \text{(Abkürzung)}$$

$$x := x^{(k)} \quad , \quad f := f\left(x^{(k)}\right) \quad , \quad f' := f'\left(x^{(k)}\right) \quad , \quad f'' := f''\left(x^{(k)}\right)$$

$$
\begin{aligned}
x^{(k+1)} - x^* &= x - x^* - \frac{f \cdot f'}{(f')^2 - \frac{1}{2} f \cdot f''} \\
&= \frac{\left(x - x^*\right)\cdot\left((f')^2 - \frac{1}{2} f \cdot f''\right) - f \cdot f'}{(f')^2 - \frac{1}{2} f \cdot f''} \\
&= \frac{\left(x - x^*\right)\cdot\left((f')^2 - \frac{1}{2} f \cdot f'' - (f')^2 + \frac{1}{2} f \cdot f''\cdot\left(x - x^*\right) - R \cdot f'\cdot\left(x - x^*\right)^2\right)}{(f')^2 - \frac{1}{2} f \cdot f''}
\end{aligned}
$$

$$= \left(x - x^*\right)\cdot$$

$$\frac{\left(-\frac{1}{2} f \cdot f''\cdot\left(x - x^*\right) + \frac{1}{4}(f'')^2 \cdot\left(x - x^*\right)^2 - \frac{1}{2} f''\cdot R \cdot\left(x - x^*\right)^3 + \frac{1}{2} f'\cdot f''\cdot\left(x - x^*\right) - R \cdot f'\cdot\left(x - x^*\right)^2\right)}{(f')^2 - \frac{1}{2} f \cdot f''}$$

$$= (x - x^*)^3 \cdot \frac{\frac{1}{4}(f'')^2 - \frac{1}{2} f''\cdot R \cdot\left(x - x^*\right) - R \cdot f'}{(f')^2 - \frac{1}{2} f \cdot f''}$$

$\Rightarrow$ kubische Konvergenz

3.b)

$$f(x) = x^2 - a$$
$$f'(x) = 2x$$
$$f''(x) = 2$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{2x^{(k)} \cdot \left(\left(x^{(k)}\right)^2 - a\right)}{3 \cdot \left(x^{(k)}\right)^2 + a}$$

3.c)

$$f(x) = x^3 - a$$
$$f'(x) = 3x^2$$
$$f''(x) = 6x$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\left(x^{(k)}\right)^2 \cdot \left(\left(x^{(k)}\right)^3 - a\right)}{2 \cdot \left(x^{(k)}\right)^4 + a}$$