Aufgabe 3.1

Variable : $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{Sorte i besser als j} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$

Eingangsdaten c_{ij} : Anzahl der Studenten, welche die Sorte i besser finden als die Sorte j.

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,10} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{10,1} & c_{10,2} & \cdots & c_{10,10} \end{pmatrix} \quad c_{i,i} \; uninteressant$$

Zielfunktion : $\sum_{i,j=1}^{10} c_{i,j} x_{i,j} \to \max$

Als Ergebnis erhält man ein Ranking der Biersorten, gesucht : $x = x_{i,j}$ als Lösung des LOP.

Restriktionen :

$$\begin{aligned} x_{i,j} + x_{i,i} &= 1 \qquad i,j = 1,...,10 \\ x_{i,i} &= 0 \qquad i = 1,...,10 \\ x_{i,j} + x_{j,k} + x_{k,i} &\leq 2 \qquad (Transitivitaet) \\ 0 \leq x_{i,j} &\leq 1 \qquad i,j = 1,...,10 \quad , ganzzahlig \end{aligned}$$

Aufgabe 3.2

Zeigen, dass $K = \{x \in \mathbb{R}^n : x = Au \ , \ , u \geq 0\}$ konvexer Kegel ist :

Es ist zu zeigen :

1.) Kegel-Kriterium : $\lambda \cdot k \in K \quad , \forall k \in K \ , \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \; mit \; \lambda \geq 0$

Sei $k \in K$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \geq 0$, sowie $u \in \mathbb{R}^m$ mit $u \geq 0$

$\lambda \cdot k = \lambda(Au) \ = \ A(\lambda u)$

Wegen $\lambda \cdot u \geq 0$ ist $\lambda \cdot k \in K \quad k, \lambda$ wie oben

$\Rightarrow$ K ist ein Kegel

2.) Konvexität : $\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 \in K$ mit $x^1, x^1 \in K$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$

Seien $x^1, x^2, \alpha_1, \alpha_2$ wie oben und $u^1, u^2 \in \mathbb{R}^m$, $u^1, u^2 \geq 0$.

$\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 \ = \ \alpha_1(Au^1) + \alpha_2(Au^2) \ = \ A(\underbrace{\alpha_1 u^1 + \alpha_2 u^2}_{\geq 0})$

$\Rightarrow$ $\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 \in K$

$\Rightarrow$ K ist konvex

q.e.d.

K^* = Kegel :

Sei $k \in K^*$ $, \lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \geq 0$ und $y \in \mathbb{R}^n$ mit $y \geq 0$

Dann gilt : $\lambda k \;=\; \lambda(Au)^T y \underbrace{(Au)^T}_{=x^T} \underbrace{\lambda y}_{\geq 0}$

$\Rightarrow \;\; \lambda k \in K^*$

$\Rightarrow \;\; K^*$ ist ein Kegel

Konvexität von K^* :

Seien wieder $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ und $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, sowie $y^1, y^2 \in K^*$ gegeben.

Also ist wieder zu zeigen, dass $\alpha_1 y^1 + \alpha_2 y^2 \in K^*$ ist :

Für ein $x \in K$ folgt : $\;x^T(\alpha_1 y^1 + \alpha_2 y^2) = \alpha_1 \underbrace{x^T y^1}_{\geq 0,\; da\; y^{\in} K^*} + \alpha_2 \underbrace{x^T y^2}_{\geq 0,\; da\; y^{\in} K^*} \geq 0$

$\Rightarrow \;\; \alpha_1 y^1 + \alpha_2 y^2 \in K^*$

$\Rightarrow \;\; K^*$ ist konvex

Zeigen, dass die Menge K^* polyedrisch ist :

$$\begin{aligned} K^* &= \left\{ y \in \mathbb{R}^n \;:\; x^T y \geq 0 \;\; \forall x \in K \right\} \\ &= \left\{ y \in \mathbb{R}^n \;:\; (Au)^T y \geq 0 \;\; , u \geq 0 \right\} \\ &= \left\{ y \in \mathbb{R}^n \;:\; u^t A^T y \geq 0 \;\; , u \geq 0 \right\} \end{aligned}$$

$u^T(A^T y) \geq 0$ mit $u \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (A^t y)_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji} y_j \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A^T y \geq 0$ (endliches System)

D.h. $K^* = \{y \in \mathbb{R}^n \;:\; A^T y \geq 0\}$

Es gilt : $z = A^T y \;\;,\; z \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad u^T z \geq 0 \;\; \forall u \geq 0$

Angenommen, es existiert ein $i \in \{1, ..., n\}$, so dass $z_i < 0$, so folgt für $u = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ u_i \neq 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$:

$u^T z = u_i z_i < 0$

$\Rightarrow$ Widerspruch zur obigen Annahme

$\Rightarrow \;\; K^*$ ist eine polyedrische Menge

Aufgabe 3.3 :

Die konvexe polyedrische Menge B ist gegeben durch :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10 \tag{1}$$
$$x_1 - x_2 \leq 0 \tag{2}$$
$$x_1 - x_3 \leq 2 \tag{3}$$
$$x_1 + x_2 - x_4 \leq 3 \tag{4}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \tag{5}$$

Seien für die folgenden (Hyperebenen-)Berechnungen noch folgende Gleichungen gegeben :

$$x_1 = 0 \tag{6}$$
$$x_2 = 0 \tag{7}$$
$$x_3 = 0 \tag{8}$$
$$x_4 = 0 \tag{9}$$

Ein Punkt x^i ist genau dann eine Ecke von B, wenn er sich als Schnittpunkt von 4 linear unabhängigen Hyperebenen darstellen lässt.
D.h. für jeden der Punkte ist dies zu prüfen :

$\underline{x^1 = (2,2,2,0)^T :}$ erfüllt nur (2) und (9),(d.h. nur 2 der Hyperebenengeichungen), ist also keine Ecke von B
Wegen (4) : $2+2-0=4 \quad \leq 3$ folgt sogar, dass $x^1 \notin B$

$\underline{x^2 = (3,3,1,3)^T :}$ erfüllt (1),(2),(3) und (4) , also ausreichend viele Hyperebenengleichungen.
Diese nun auf lineare Unabhängigkeit prüfen :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -2 - 1 - 2 = -5 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Die Hyperebenen sind linear unabhängig.
$\Rightarrow$ x^2 ist eine Ecke von B.

$\underline{x^4 = (0,0,6,4)^T :}$ erfüllt (1),(2),(6) und (7), also ausreichend viele Hyperebenengleichungen.
Diese nun auf lineare Unabhängigkeit prüfen :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{, da 3. und 4. Spalte identisch sind.}$$

$\Rightarrow$ Hyperebenengleichungen sind linear abhängig
$\Rightarrow$ x^3 ist keine Ecke von B (liegt aber in B, da alle Ungleichungen erfüllt sind)

<u>Besitzt B entartete Ecken ?</u>
(x =entartete Ecke $\iff$ x ist Schnittpunkt von mehr als 4 Hyperebenen die B begrenzen.)
Ja, da B durch mehr als 4 linear unabhängige Hyperebenen begrenzt wird :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel einer entarteten Ecke : $x = (0,0,0,10)^T$
Sie erfüllt die 5 (statt 4) Hyperebenen-gleichungen 1,2 und 5,6,7 (Zeilennummern).
Desweiteren ist $x \in B$, da x auch die restlichen Restriktionen mit Ungleichheitszeichen erfüllt.

Aufgabe 3.4 :

$$x_1 + 3x_2 \leq 13$$
$$3x_1 + x_2 \leq 15$$
$$-x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \text{Ungleichungssystem :} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 13 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Anfangsecke suchen :
Für $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ folgt : $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ erfüllt die linear unabhängigen Restriktionen $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ mit "=" und keine weiteren Restriktionen mit "=".
$\Rightarrow$ x^0 ist eine nicht-entartete Ecke

Koordinatentransformation T und Auflösung :
$y_1 = 0 + x_1$
$y_2 = 0 + x_2$
Ausgangsgleichungssystem bleibt erhalten mit y_1, y_2 statt x_1, x_2

Nachbarecken :

- Es gilt : $a_{31} = 1 > 0$ und $a_{41} = 3 > 0$
  $y_1^* = \min\left\{\frac{b_3}{a_{31}}, \frac{b_4}{a_{41}}\right\} = \min\left\{\frac{13}{1}, \frac{15}{3}\right\} = 5$
  D.h. , $y_1^* = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Nachbarecke von x^0.

- Es gilt : $a_{32} = 3 > 0$ und $a_{42} = 1 > 0$ und $a_{52} = 1 > 0$
  $y_2^* = \min\left\{\frac{b_3}{a_{32}}, \frac{b_4}{a_{42}} \frac{b_5}{a_{52}}\right\} = \min\left\{\frac{13}{3}, \frac{15}{1}, \frac{3}{1}\right\} = 3$
  D.h. , $y_2^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist Nachbarecke von x^0.