Übung Lineare Optimierung SS 2006 Blatt 4

1. Sie wollen Ihrer Tante (vielleicht eine reiche Erbtante ?) zum Geburtstag eine Freude machen. Ihre Tante trinkt gerne süßen Wein und da Ihnen eine Beerenauslese zu teuer ist, kommen Sie auf die Idee, ihr einen Liter Wein zukommen zu lassen, den Sie selbst zusammengestellt haben. Hierzu können Sie einen Landwein für 50 Cent pro Liter, zur Anhebung der Süße, Diäthylenglykol-haltiges Frostschutzmittel für 60 Cent pro Liter und zur Verbesserung der Lagerungsfähigkeit eine Natriumacid-Lösung für 90 Cent pro Liter kaufen. Verständlicherweise wollen Sie eine möglichst billige Mischung herstellen, wobei aber folgende Nebenbedingungen zu beachten sind: Um eine hinreichende Süße zu garantieren, muss die Mischung mindestens 1/3 Frostschutzmittel enthalten. Andererseits muss (z.B. wegen gesetzlicher Bestimmungen) mindestens halb soviel Wein wie Frostschutzmittel enthalten sein. Der Natriumacid-Anteil muss mindestens halb so groß, darf aber andererseits höchstens so groß wie der Glykol-Anteil sein und darf die Hälfte des Weinanteils nicht unterschreiten.

   Formulieren Sie das zugehörige Optimierungsproblem und lösen Sie es mit einem Computerprogramm Ihrer Wahl (z.B. Solver von Excel, Mathematica, Maple)!

2. Beweisen Sie die folgende Aussage:

   Wenn ein lineares Optimierungsproblem nur lineare Gleichungen als Nebenbedingungen besitzt, so existiert entweder keine Lösung des Problems oder jeder Punkt des zulässigen Bereiches ist optimal.

3. a) Sei $M := \{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} : Ax \leq b\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$ und $b \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$ nichtleer. Man zeige, dass M nicht notwendig Ecken besitzt.

   b) Sei $M := \{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} : Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$ und $b \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$ nichtleer. Man zeige, dass M Ecken besitzt.

4. Sind die folgenden Behauptungen korrekt? Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an!

   a) Die Summe zweier konvexer Funktionen ist wiederum konvex.

   b) Das Produkt zweier konvexer Funktionen ist wiederum konvex.

   c) Das Minimum zweier konvexer Funktionen ist wiederum konvex.

   d) Das Maximum zweier konvexer Funktionen ist wiederum konvex.