Lineare Optimierung - Übung09 - Georg Kuschk

Aufgabe 9.1 :

$$2000x_1 + 3000x_2 \to \min$$
$$6x_1 + 2x_2 \quad \geq 24$$
$$4x_1 + 12x_2 \quad \geq 48$$
$$2x_1 + 2x_2 \quad \geq 16$$

$$\Rightarrow$$
$$-6x_1 - 2x_2 \quad \leq -24$$
$$-4x_1 - 12x_2 \quad \leq -48$$
$$-2x_1 - 2x_2 \quad \leq -16$$

Dualer Simplex-Algorithmus auf primalem Problem :

	x_1	x_2	
s_1	-6	-2	-24
s_2	-4	***-12***	-48
s_3	-2	-2	-16
Q	2000	3000	0

Wähle Pivotzeile No.2 (kleinste Kostenregel)

Pivotspalte l bestimmen : $-\frac{c_l}{a_{kl}} := \min\left\{ \frac{c_i}{-a_{ki}} \quad : a_{ki} < 0 \right\}$

	x_1	s_2	
s_1	$-6 + \frac{2}{3} = -\frac{16}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-24 + 8 = -16$
x_2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{12}$	4
s_3	$-2 + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-16 + 8 = -8$
Q	$2000 - 1000 = 1000$	$-\frac{3000}{-12} = 250$	$0 + (-48) \cdot 250 = -12000$

D.h.

	x_1	s_2	
s_1	$-\frac{16}{3}$ (Piv)	$-\frac{1}{6}$	-16
x_2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{12}$	4
s_3	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{6}$	-8
Q	1000	250	-12000

Pivotzeile : No. 1

$1000 \cdot \frac{3}{16} = 187.5$, $250 \cdot 6 = 1500$ $\Rightarrow$ Pivotspalte No.1

	s_1	s_2	
x_1	$-\frac{3}{16}$	$\frac{1}{32}$	3
x_2	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{12} + \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \frac{1}{16} = -\frac{3}{32}$	$4 + (-16) \cdot \frac{1}{16} = 3$
s_3	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{6} + \left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$	$-8 + (-16)\left(-\frac{1}{4}\right) = -4$
Q	$\frac{3000}{16}$	$250 + \left(-\frac{1}{6}\right)\frac{3000}{16} = \frac{875}{4}$	$-12000 + (-16)\frac{3000}{16} = -15000$

D.h.

	s_1	s_2	
x_1	$-\frac{3}{16}$	$\frac{1}{32}$	3
x_2	$\frac{1}{16}$	$-\frac{3}{32}$	3
s_3	$-\frac{1}{4}$ (Piv)	$-\frac{1}{8}$	-4
Q	$\frac{3000}{16}$	$\frac{875}{4}$	-15000

$$\frac{3000}{16}\cdot 4 = 750 \qquad , \qquad \frac{875}{4}\cdot 8 = 1750 \qquad \Rightarrow \text{ Pivotspalte No.1}$$

	s_3	s_2	
x_1	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{32}+\left(-\frac{1}{8}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{8}$	$3+(-4)\left(-\frac{3}{4}\right)=6$
x_2	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{32}+\left(-\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{8}$	$3+(-4)\frac{1}{4}=2$
s_1	-4	$\frac{1}{2}$	16
Q	750	$\frac{875}{4}+\left(-\frac{1}{8}\cdot 750\right)=125$	$-15000+(-4)\cdot 750=-18000$

Optimalität erreicht

$\Rightarrow$

Lösung des LOP : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $Q_{\min} = 18000$

Aufgabe 9.2 :

Zu $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist der zugehörige Schnittpunkt $x^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}$ zu bestimmen :

???
$u^T b = c^T x$
komplementäre Schlupfbedingungen :
$u^T (b - Ax) = 0$
$x^T (A^T u - c) = 0$
???

Aufgabe 9.3 :

Lemma von Farkas : Das System $Ax = b$, $x \geq 0$ besitzt genau dann keine Lösung, wenn $A^T u \leq \vec{0}$, $b^T u > 0$ lösbar ist.

a) Annahme : $A^T u = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b^T u = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} > 0$

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{lll} -u_1 - 4u_2 & \leq 0 & (1) \\ -2u_1 + u_2 + 7u_3 & \leq 0 & (2) \\ 2u_1 & \leq 0 & (3) \\ 3u_3 & \leq 0 & (4) \\ 2u_1 - 8u_2 + 3u_3 & > 0 & (5) \end{array}$$

Aus (3) und (4) folgt : $u_1 \leq 0$ und $u_3 \leq 0$.

In (1) eingesetzt folgt : $0 \leq -u_1 \leq 4u_2$ $\Rightarrow u_2 \geq 0$.
In (5) eingesetzt folgt : $-8u_2 > 0$ $\Rightarrow u_2 < 0$.

$\Rightarrow$ Widerspruch, also ist $A^T u \leq \vec{0}$, $b^T u > 0$ nicht lösbar, und $Ax = b$, $x \geq 0$ somit lösbar.

b) Annahme : $A^T u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b^T u = \begin{pmatrix} -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} > 0$

$\Rightarrow$

$u_1 + 2u_2 \le 0$ (1)

$2u_1 + 2u_2 \le 0$ (2)

$-3u_1 - 5u_2 \le 0$ (3)

$-u_1 + 4u_2 > 0$ (4)

$\Rightarrow$

$u_1 \le -2u_2$ (1')

$u_1 \le -u_2$ (2')

$u_1 \ge -\frac{5}{3}u_2$ (3')

$u_1 < 4u_2$ (4')

Aus (1') und (3') folgt : $-\frac{5}{3}u_2 \le u_1 \le -2u_2$

$\Rightarrow -\frac{5}{3}u_2 \le -2u_2$ $\Rightarrow 0 \ge \frac{1}{3}u_2$ $\Rightarrow u_2 \le 0$ (*)

Aus (2') und (3') folgt : $-\frac{5}{3}u_2 \le u_1 \le -u_2$

$\Rightarrow -\frac{5}{3}u_2 \le -u_2$ $\Rightarrow 0 \le \frac{2}{3}u_2$ $\Rightarrow u_2 \ge 0$ (**)

Aus (*) und (**) folgt nun $u_2 = 0$.

Einsetzen in (1')-(4') liefert :

$u_1 \le 0$

$u_1 \le 0$

$u_1 \ge 0$ (3'')

$u_1 < 0$ (4'')

Hier liegt der Widerspruch in der (3'') und (4'').

$\Rightarrow$ $A^T u \le \vec{0}$, $b^T u > 0$ ist nicht lösbar, und $Ax = b$, $x \ge 0$ somit lösbar.