

Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Lehrstuhl für Technische Informatik
Prof. P. Molitor



Ausgabe: 2006-04-17

Abgabe: 2006-04-25

Synthese, Test und Verifikation digitaler Systeme

Obere Schranke für die Komplexität Boolescher Schranken

Aufgabe 1 (Punkte: 0)

Für jede Boolesche Funktion $f \in \mathbf{B}_n$ und jede Variable x_i mit $1 \leq i \leq n$ seien f_{x_i} und $f_{x'_i}$ die wie folgt definierten Booleschen Funktionen aus \mathbf{B}_n :

$$\begin{aligned}f_{x_i}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) \\f_{x'_i}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)\end{aligned}$$

$(\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{0, 1\}^n)$.

- Beweisen Sie, dass die so genannte Shannon-Zerlegung

$$f = x_i \cdot f_{x_i} + x'_i \cdot f_{x'_i}$$

für alle Boolesche Funktionen $f \in \mathbf{B}_n$ gilt

- Die Shannon-Zerlegung führt direkt zu einem Verfahren, um eine beliebige Boolesche Funktion $f \in \mathbf{B}_n$ hierarchisch zu beschreiben und somit einen konkreten Schaltkreis zu konstruieren, der genau f entspricht.
 - a) Beschreiben Sie diese rekursive Konstruktion in Form eines Pseudo-Programms.
 - b) Geben Sie für dieses Verfahren und beliebiges $f \in \mathbf{B}_n$ die Größe $C_1(\mathbf{B}_n)$ des Schaltkreises an. Beweisen Sie Ihre Aussage! *Diese Größe entspricht dann einer oberen Schranke für die Schaltkreiskomplexität $C(\mathbf{B}_n)$, d. h. $C(\mathbf{B}_n) \leq C_1(\mathbf{B}_n)$.*

Aufgabe 2 (Punkte: 0)

Ein allgemeines Vorgehen, um z. B. die Laufzeit eines Algorithmuses zu reduzieren, ist die Vorberechnung (oder Speicherung) von Probleminstanzen. Diese Möglichkeit kann auch für den Schaltkreisentwurf genutzt werden.

Ziel in dieser Aufgabe soll es sein, einen Schaltkreis zu entwickeln, der **alle** 2^{2^k} Funktionen aus \mathbf{B}_k berechnet. Dieser Schaltkreis besitzt also k primäre Eingänge und 2^{2^k} primäre Ausgänge.

Geben Sie die Größe $C^*(\mathbf{B}_k)$ eines solchen Schaltkreises unter Verwendung der Shannon-Zerlegung an. Beweisen Sie Ihre Aussage!

Aufgabe 3 (Punkte: 0)

Die Konstruktion eines Schaltkreises mittels der Shannon-Zerlegung soll jetzt mit dem Vorgehen der Vorberechnung aller Funktionen aus \mathbf{B}_k zu einem Verfahren verschmolzen werden, sodass die Größe $C_2(\mathbf{B}_n)$ des sich ergebenden Schaltkreises kleiner als die Größe $C_1(\mathbf{B}_n)$ ist.

- a) Beschreiben Sie eine solche Verschmelzung in Abhängigkeit von einem fest vorgegebenen n und k , d. h. wie eine Vorberechnung (Vorkonstruktion) von \mathbf{B}_k in den Algorithmus der Konstruktion durch die Shannon-Zerlegung integriert werden kann. Geben Sie die Größe $C_2(\mathbf{B}_n, k)$ des so entstandenen Schaltkreises als Funktion von n und k an.
- b) Wählen Sie ein möglichst gutes k , um zu einem möglichst guten Wert $C_2(\mathbf{B}_n)$ und somit zu einer möglichst guten oberen Schranke für $C(\mathbf{B}_n)$ zu kommen!