Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Lehrstuhl für Technische Informatik

Prof. P. Molitor

Ausgabe: 2006-04-21

Abgabe: 2006-05-02

Synthese, Test und Verifikation digitaler Systeme

(AND/OR)-, (OR/AND)- und(AND/EXOR)-Polynome Boolescher Funktionen

Aufgabe 1 (Punkte: 0)

Sei f eine Boolsche Funktion über n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ mit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und a ein Boolscher Vektor mit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{B}^n$.

Der zu a gehörige *Minterm* $mint(a, x)$ und der zu a gehörige *Maxterm* $maxt(a, x)$ über den Variablen aus x sind gegeben durch

$$mint(a, x) = x_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n} \quad \text{und} \quad maxt(a, x) = x_1^{a_1'} + \ldots + x_n^{a_n'}.$$

Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussage:

$$f(x) = \bigvee_{a \in f^{-1}(1)} mint(a, x) = \bigwedge_{a \in f^{-1}(0)} maxt(a, x)$$

Hinweise: Der Ausdruck x_i^0 bezeichne das negative Literal x_i' und analog dazu x_i^1 das positive Literal x_i der Variablen x_i. Andere Schreibweisen für $f^{-1}(1)$ bzw. $f^{-1}(0)$ sind $ON(f)$ bzw. $OFF(f)$.

Aufgabe 2 (Punkte: 0)

$(\mathbf{R}, +, \cdot)$ ist der Körper der natürlichen Zahlen. Ein Polynom fünften(!) Grades über diesen Körper in den Variablen a, b und c ist beispielsweise $a \cdot b + 4 \cdot a^2 \cdot b \cdot c + 3 \cdot b^3 \cdot c^2 + c^4$. *(Der Grad eines Polynoms sei die Summe der, in einem mit $\cdot$ verknüpften Term, vorkommenden Variablenexponenten. Im Beispiel betrifft dies den Term $3 \cdot b^3 \cdot c^2$.)*

Satz: $(\{0, 1\}, \oplus, \wedge)$ bildet den Körper $\mathbf{Z}_2$.

a) Welchen Grad kann ein beliebiges $\mathbf{Z}_2$-Polynom in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ maximal besitzen?

b) Wieviele verschiedene $\mathbf{Z}_2$-Polynome in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ gibt es?

c) Sei $f \in \mathbf{B}_n$ eine Boolsche Funktion, $a \in \{0, 1\}^n$ und $mint(a, x)$ der zu a gehörige Minterm. Dann gilt:

$$f(x) = \bigvee_{a \in f^{-1}(1)} mint(a, x) = \bigoplus_{a \in f^{-1}(1)} mint(a, x).$$

Betrachten Sie die Funktion $f \in \mathbf{B}_3$ in DNF mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2' x_3 + x_1' x_2 x_3' + x_1' x_2' x_3' + x_1' x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3' + x_1 x_2 x_3.$$

Wandeln Sie f in ein $\mathbf{Z}_2$-Polynom um. Welchen Grad hat dieses Polynom?

d) Zeigen Sie, daß jede Boolsche Funktion f eine eindeutige Darstellung als $\mathbf{Z}_2$-Polynom hat.

(Dieses $\mathbf{Z}_2$-Polynom von f wird Ring-Summen-Expansion (RSE) von f genannt.)