Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Lehrstuhl für Technische Informatik

Prof. P. Molitor

Ausgabe: 2006-06-21

Abgabe: 2006-06-27

Synthese, Test und Verifikation digitaler Systeme

Funktionale Zerlegung Boolescher Funktionen

Definition

Seien $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, $g : \{0,1\}^q \to \{0,1\}$, $\alpha : \{0,1\}^p \to \{0,1\}^s$ und $\beta : \{0,1\}^{n-p} \to \{0,1\}^r$ vier Boolesche Funktionen mit $1 \leq p < n$ und $q = r + s$.

Das Tupel (g, α, β) heißt *funktionale Zerlegung von f* (oder einfach nur *Zelegung von f*), wenn

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g \circ (\alpha(x_1, \ldots, x_p) \times \beta(x_{p+1}, \ldots, x_n))$$

gilt. Die Zerlegung heißt *nichttrivial*, wenn $r + s < n$ gilt.

Die Zerlegung heißt *einseitig*, wenn β (oder α) die Identität ist, d. h. $\beta : \{0,1\}^{n-p} \to \{0,1\}^{n-p}$ mit $\beta(x_{p+1}, \ldots, x_n) = (x_{p+1}, \ldots, x_n)$ gilt. Ansonsten heißt die Zerlegung *zweiseitige* Zerlegung.

Aufgabe 1 (Punkte: 0)

Gegeben sei die Schwellenwertfunktion $s_{6,4}\{0,1\}^6 \to \{0,1\}$ mit $s_{6,4}(x_1, \ldots, x_6) = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{6} x_i \geq 4$.

a) Zerlegen Sie $s_{6,4}$ mithilfe der zweiseitigen funktionalen Dekomposition. Benutzen Sie dabei soviele Rekursionsstufen, wie Sie benötigen und verdeutlichen Sie sie. Verwenden Sie in diesem Beispiel keine BDDs, sondern stellen Sie die Schaltung durch Grundgatter dar. Achten Sie bei der Zerlegung immer auf nichttriviale Zerlegungen.

b) Bestimmen Sie die Gatterzahl bei der funktionalen Dekomposition und die Kosten für die Realisierung als Minimalpolynom. Die Kostenfunktion des Minimalpolynoms ist wie gewöhnlich zu wählen.

Aufgabe 2 (Punkte: 0)

Gegeben sei eine Boolesche Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ mit $n \geq 4$. Zeigen Sie, dass es mindestens eine nichttriviale funktionale Zerlegung von f gibt?

Aufgabe 3 (Punkte: 0)

Zeigen Sie, dass es eine nichttriviale einseitige funktionale Zerlegung der Form

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g \circ (\alpha(x_1, \ldots, x_p) \times (x_{p+1}, \ldots, x_n))$$

gibt, falls $p \geq 2^{n-p} + 1$ gilt.