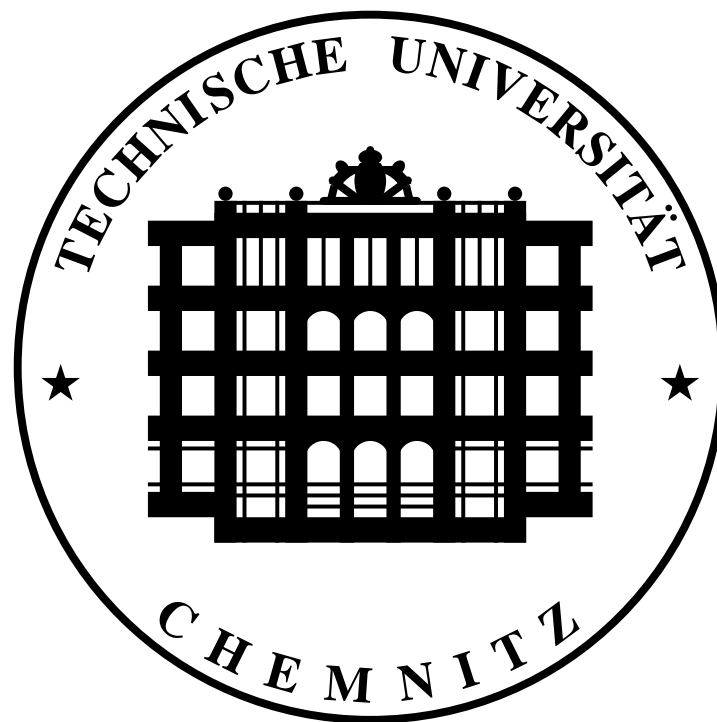


Technische Universität Chemnitz

Aufgabensammlung

zur Grundvorlesung Stochastik



Fakultät für Mathematik - Lehrstuhl Stochastik

1 Kombinatorik

- 1.1. a) Wieviel voneinander verschiedene dreistellige (ganze, positive) Zahlen kann man mit Hilfe der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 bilden?
- b) Welches Ergebnis erhält man bei Aufgabe a), wenn jede Ziffer nur höchstens einmal in der zu bildenden Zahl vorkommen darf?
- 1.2. Wieviele Zeichen sind mit der Blindenschrift von Braille darstellbar ?
- 1.3. Bei einem Turnier, an dem 10 Mannschaften teilnehmen, können Wetten über die Vergabe der ersten drei Plätze abgeschlossen werden. Wieviele verschiedene Tips sind dabei möglich ?
- 1.4. Wieviel verschiedene Tips gibt es
- a) beim Lotto 6 aus 49,
- b) bei der Glücksspirale,
- c) bei der 11er Wette?
- 1.5. Eine Person hat beim Lotto 6 aus 49 alle möglichen Tips gespielt. Wie oft hat sie dann:
- a) 6 richtige Zahlen,
- b) 3 richtige Zahlen,
- c) insgesamt Gewinnscheine?
- 1.6. In Chemnitz werden Kraftfahrzeuge gewöhnlich in der Weise:

$$C - xx\ yyy$$

gekennzeichnet, wobei x die Großbuchstaben des Alphabets und y eine einstellige nicht-negative ganze Zahl darstellen. Bestimmen Sie unter der Annahme, daß für die Großbuchstaben des Alphabets jeweils nur 23 verschiedene Buchstaben zur Anwendung kommen, die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten der Kfz-Kennzeichnung.

- 1.7. In der Umgebung eines Urlaubsortes sollen 15 Wanderwege durch je zwei farbige, parallele Striche gekennzeichnet werden. Wieviel verschiedene Farben benötigt man mindestens, wenn gleichfarbige Paare auftreten dürfen und die Anordnung der Striche keine Rolle spielt?
- 1.8. Man zeige

$$\text{a) } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n, \quad \text{b) } \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}, \quad \text{c) } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

2 Zufällige Ereignisse

- 2.1. Ein Händler hat drei Videorecorder einer bestimmten Marke geliefert bekommen und überprüft deren Funktionstüchtigkeit, bevor er sie an seine Kunden weitergibt. Es bezeichne A_i , $i = 1, 2, 3$, das Ereignis, daß beim i -ten Gerät ein Defekt festgestellt wird.
- Man beschreibe mit Hilfe von A_1, A_2, A_3 und geeigneten Operationen die folgenden Ereignisse.
 - A : Alle Videorecorder sind defekt.
 - B : Kein Videorecorder ist defekt.
 - C : Mindestens ein Videorecorder ist defekt.
 - D : Genau ein Videorecorder ist defekt.
 - E : Höchstens zwei Videorecorder sind in Ordnung.
 - Welche der genannten Ereignisse können als Elementarereignisse betrachtet werden?
 - Aus wieviel Elementarereignissen bestehen die Ereignisse C, D bzw. der Ereignisraum Ω ?
- 2.2. Bei der Gütekontrolle von zwei Graugußteilen wird für jedes Teil festgestellt, ob es sofort verwendbar ist, ob sich Nacharbeit erforderlich macht oder ob das Teil Ausschuß ist.
- Man gebe alle Elementarereignisse an.
 - Man stelle folgende Ereignisse mit Hilfe der Elementarereignisse dar:
 - A : Beide Teile sind sofort verwendbar.
 - B : Es ist keine Nacharbeit erforderlich.
 - C : Höchstens eines der beiden Teile ist Ausschuß.
 - D : Mindestens eines der beiden Teile ist Ausschuß.
- 2.3. Es werden zwei Münzen geworfen. Mit A wird das Ereignis "beide Münzen zeigen Zahl" und mit B "beide Münzen zeigen Wappen" bezeichnet. Welche zufälligen Ereignisse sind noch hinzufügen, damit eine Ereignisalgebra entsteht?
- 2.4. A und B seien beliebige zufällige Ereignisse in einem Ereignisraum Ω . Durch welche Ereignisse sind A und B zu ergänzen, um eine Ereignisalgebra zu erhalten?
- 2.5. Können die Ereignisse A und $\overline{A \cup B}$ gleichzeitig eintreten ?
- 2.6. Wann gilt $A \cup B = \overline{A}$, $A \cap B = \overline{A}$, $A \cup B = A \cap B$?
- 2.7. Man zeige
- $$\overline{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \bigcap_{k=1}^n \overline{A_k} \quad \text{und} \quad \bigcup_{k=1}^n \overline{A_k} = \overline{\bigcap_{k=1}^n A_k}.$$
- 2.8. Für die Ereignisse A und B seien folgende Wahrscheinlichkeiten bekannt:
 $P(A) = 0.25$; $P(B) = 0.45$; $P(A \cup B) = 0.5$.
 Man berechne die Wahrscheinlichkeiten:
 $P(A \cap \overline{B})$; $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ und $P((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B))$.

3 Klassische Methode

- 3.1. Ein Würfel, dessen Seitenflächen gleichartig gefärbt sind, werde in 1000 kleine Würfel einheitlicher Größe zerlegt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein zufällig ausgewählter Würfel auf mindestens einer Seite gefärbt ist ?
- 3.2. Beim Wurf zweier Würfel können die Augensummen 9 und 10 auf jeweils zwei verschiedenen Wegen erhalten werden ($9=4+5=3+6$, $10=5+5=6+4$). Bei drei Würfeln ergeben sich jeweils sechs Möglichkeiten. Wieso kommt es dann, daß man mit zwei Würfeln häufiger 9 erhält als 10, bei drei Würfeln dagegen 10 öfter auftritt als 9 ?
(Die Lösung war bereits Galileo Galilei bekannt, Leibniz und d'Alembert sollen sich dagegen bei der Lösung geirrt haben!)
- 3.3. Was ist wahrscheinlicher:
 - a) Beim Werfen von vier Würfeln auf wenigstens einem eine Sechs zu erzielen, oder
 - b) bei 24 Würfeln von zwei Würfeln wenigstens einmal zwei Sechsen zu erhalten?

(Dieses Problem wurde im 17. Jahrhundert von Chevalier de Mere gestellt. Er nahm an, daß beide Wahrscheinlichkeiten gleich seien und bat Pascal um Überprüfung. Dieser fand zusammen mit Fermat die richtige Lösung.)

- 3.4. Bei einem Spiel zwischen den Spielern A und B wird nacheinander eine Münze geworfen. Erscheint Zahl, so erhält A einen Punkt, anderenfalls B. Gewinner des Spieles ist, wer zuerst 6 Punkte gesammelt hat.
Bei einem Spielstand von 5:3 mußte das Spiel abgebrochen werden. Wie sollte der Gewinn gerecht verteilt werden ? (Dieses Problem ist als Aufteilungsparadoxon bekannt.)
- 3.5. Bei einer Nikolausfeier im Kindergarten bringt jedes der 12 Kinder ein Päckchen mit, welches der Nikolaus in seinen Sack steckt. Später verteilt er die 12 Päckchen wieder zufällig an die Kinder. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß keines der Kinder sein eigenes Päckchen zurückbekommt ?

4 Diskrete Verteilungen

- 4.1. Wieviele Kinder müßte eine Familie mindestens umfassen, wenn mit 90% (99%)-iger Wahrscheinlichkeit ein Junge vorhanden sein soll.
- 4.2. Eine Urne enthalte 5 weiße und 2 rote Kugeln. Der Urne werden 3 Kugeln zufällig entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich unter diesen Kugeln genau eine rote Kugel befindet, wenn die entnommenen Kugeln
 - (a) zurückgelegt
 - (b) nicht zurückgelegtwerden ?

- 4.3. Ein Student kann von 20 Prüfungsfragen 18 Fragen beantworten. Die Note 1 wird genau dann erteilt, wenn von 4 zufällig gewählten Fragen alle beantwortet werden können. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Student die Note 1 erhält.
- 4.4. In einem Landkreis ist unter den dort zugelassenen PKW jeder vierte ein Dieselfahrzeug, jeder zweite ist mit einem Katalysator ausgerüstet und alle übrigen PKW fahren ohne Katalysator (und ohne Diesel). Ein Beamter des Finanzamtes bearbeitet für 8 Fahrzeuge die Kfz-Steuer. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich darunter 2 Dieselfahrzeuge, 4 PKW mit Katalysator und 2 PKW ohne Katalysator befinden ?
- 4.5. Von 1000 Teilen einer Warensendung dürfen höchstens 20 Teile defekt sein. Da eine Totalprüfung der gesamten Lieferung unmöglich ist, werden 50 Teile zufällig entnommen und geprüft. Es wird vereinbart, daß die Lieferung angenommen wird, wenn sich in der Stichprobe höchstens ein defektes Teil befindet. Man berechne die Wahrscheinlichkeit für eine
- Annahme der Sendung, obwohl sich darin 40 defekte Teile befinden,
 - Ablehnung der Sendung, obwohl sich darin nur 10 defekte Teile befinden. ¹
- 4.6. Ein Mathematiker verbringt seinen Urlaub an einem fischreichen See. Er möchte gerne wissen, wieviele Fische im See leben und wendet hierfür folgendes Verfahren an. Zunächst fängt er 1000 Fische und gibt sie, nachdem er sie markiert hat, zurück in den See. Einige Zeit später fängt er 150 Fische und stellt fest, daß sich darunter 10 markierte befinden. Er bestimmt nun die gesuchte Fischzahl M so, daß das von ihm beobachtete Ereignis am wahrscheinlichsten wird, d.h.

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\{\text{unter 150 gefangenen Fischen befinden sich 10 markierte}\}) = \max_M$$

Welchen Wert für M erhält er ? ¹

(Der mit der angegebenen Methode erhaltene Wert ist die sogenannte Maximum-Likelihood-Schätzung für M .)

- 4.7. Man zeige mit Mitteln der Wahrscheinlichkeitsrechnung

$$\text{a) } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n, \quad \text{b) } \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}, \quad \text{c) } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

- 5.1. Eine Urne enthalte 10 Kugeln, davon seien 6 schwarz und 4 weiß. Es werden zufällig 2 Kugeln ohne Zurücklegen entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß
- die zweite Kugel schwarz ist,
 - beide Kugeln schwarz sind ?

¹Hinweis: Hypergeometrische Verteilung durch Binomialverteilung approximieren

- 5.2. Mit der Wahrscheinlichkeit p befindet sich ein Buch in einem der 8 Regale eines Lesesaales, mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ wird es gerade benutzt. Wie groß ist unter dieser Bedingung die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Buch im 8. Regal doch noch gefunden wird, wenn es in den anderen sieben bereits vergeblich gesucht wurde ?
- 5.3. Man führe Beispiele an, die zeigen, daß im allgemeinen die Gleichheiten

$$\mathbf{P}(B|A) + \mathbf{P}(B|\bar{A}) = 1 \quad \text{und} \quad \mathbf{P}(B|A) + \mathbf{P}(\bar{B}|\bar{A}) = 1$$

nicht gelten.

- 5.4. Eine Musikkassette werde zu 30 % im Auto und sonst in der Wohnung abgespielt. Im Auto habe diese mit 75 %-iger und in der Wohnung mit 95 %-iger Wahrscheinlichkeit eine Lebensdauer größer 500 Betriebsstunden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden für die Kassette mehr als 500 Betriebsstunden erreicht ?
- 5.5. Von einem AIDS-Test sei bekannt, daß er einen HIV-Infizierten mit 95 %-iger Wahrscheinlichkeit und einen nicht Infizierten mit 98 %-iger Wahrscheinlichkeit als richtig erkennt. Der Anteil der HIV-infizierten Personen betrage 0.1 %. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Patient gar nicht infiziert ist, obwohl ihn der Test als solchen einstuft ?
- 5.6. Peter und Paul sind als Lügner bekannt. Ihre Aussagen sind jeweils nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ richtig. Peter macht nun eine Aussage. Paul behauptet, daß Peters Aussage richtig sei. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß Peter tatsächlich die Wahrheit sagte ?
- 5.7. Der Sieger einer Spielshow darf als Belohnung eine von drei Türen wählen. Hinter den Türen befinden sich in zufälliger Anordnung ein Auto als Hauptgewinn bzw. (hinter den anderen beiden Türen) jeweils eine Ziege als Trostpreis. Der Sieger wählt Tür 1 aus. Der Moderator, der weiß, hinter welcher Tür sich das Auto befindet, nennt nun wahrheitsgemäß eine Tür, die der Sieger nicht ausgewählt hat und hinter der sich eine Ziege befindet. (Falls er die Wahl hat, wählt er zufällig.) In diesem Fall nennt er Tür 2. Nach dieser Zusatzinformation hat der Sieger die Möglichkeit seine Entscheidung zu überdenken. Sollte er davon Gebrauch machen und Tür 3 wählen ?
- 5.8. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß Zwillinge gleichgeschlechtlich sind, ist 0.64, und die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Knaben ist 0.51. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das zweite der Zwillingenkinder ein Junge wird, wenn das erste ein Junge ist ?

6 Unabhängigkeit

- 6.1. Das Ereignis A möge entweder die Wahrscheinlichkeit 0 oder 1 besitzen. Man zeige, daß A und ein beliebiges Ereignis B unabhängig sind.

6.2. Es sei A ein Ereignis, das nicht von sich selbst abhängt, d.h. A und \bar{A} sind unabhängig. Man zeige, daß dann $P(A)$ entweder gleich 0 oder gleich 1 ist.

6.3. Es seien A_1, \dots, A_n unabhängige Ereignisse. Man zeige

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^n P(\bar{A}_i).$$

6.4. Die folgenden vier Ereignisse setzen sich aus den in der Tabelle gegebenen Anzahlen von gleichwahrscheinlichen Elementarereignissen zusammen. Man formuliere eine Bedingung für die Unabhängigkeit von A und B mit Hilfe von a_1, a_2, a_3, a_4 .

Ereignis	$A \cap B$	$A \cap \bar{B}$	$\bar{A} \cap B$	$\bar{A} \cap \bar{B}$
Anzahl	a_1	a_2	a_3	a_4

6.5. Eine Münze mit den Seiten "Wappen" und "Zahl" werde dreimal geworfen. Dabei seien

A das Ereignis "gleiche Seiten bei den beiden letzten Würfeln",

B das Ereignis "gleiche Seiten beim 1. und 3. Wurf" und

C das Ereignis "gleiche Seiten bei den beiden ersten Würfeln".

Man untersuche, ob die Ereignisse A, B und C paarweise unabhängig bzw. vollständig unabhängig sind ?

6.6. Zur Druck- und Temperaturmessung während eines chemischen Prozesses werden Meßfühler verwendet, die während der Versuchsdauer unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit 0.1 bzw. 0.3 ausfallen. Um eine möglichst störungsfreie Meßwertaufzeichnung zu ermöglichen, werden die Meßfühler mehrfach angebracht. Aus Platzgründen können allerdings insgesamt höchstens vier Meßfühler installiert werden.

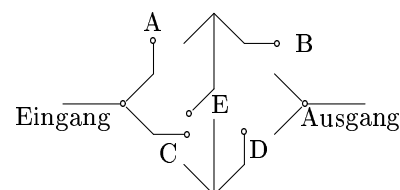
Wieviel Druck- und Temperaturmeßfühler sind zu benutzen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, daß für die gesamte Versuchsdauer sowohl Druck- als auch Temperaturangaben vorliegen, am größten wird ?

6.7. Bei einem Duell schießen die Schützen A und B solange jeweils abwechselnd aufeinander, bis der erste getroffen hat. Beide treffen bei jedem Schuß unabhängig voneinander und von den vergangenen Schüssen mit der Wahrscheinlichkeit 0.5. Schütze A beginnt. Welche Überlebenschancen haben A und B ?

6.8. In der abgebildeten elektrischen Schaltung soll jedes der unabhängig arbeitenden Relais A, B, C, D und E mit den Wahrscheinlichkeiten p bzw. q öffnen bzw. schließen.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein am "Eingang" eingegebenes Signal den "Ausgang" erreicht ?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Relais E geöffnet war, wenn das Signal den "Ausgang" erreicht ?



7 Diskrete Zufallsgrößen

- 7.1. Von einem Studenten (ohne Semesterticket) sei bekannt, daß er die Straßenbahn grundsätzlich als Schwarzfahrer benutzt. Es soll angenommen werden, daß die einzelnen Fahrten unabhängig voneinander erfolgen und eine Kontrolle mit der Wahrscheinlichkeit $p = 5\%$ zu erwarten ist. Die Zufallsgröße ξ bezeichne die Anzahl der Fahrten bis zur ersten Kontrolle. Man bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung, den Erwartungswert und die Varianz von ξ und diskutiere die Voraussetzung der Unabhängigkeit.
- 7.2. Ein Nachtwächter hat einen Schlüsselbund mit 10 ähnlich aussehenden Schlüsseln. Wenn er eine bestimmte Tür aufschließen will, in deren Schloß genau einer der 10 Schlüssel paßt, so probiert er entweder die Schlüssel nacheinander durch – d.h. kein Schlüssel wird zweimal ausprobiert – bis er den passenden findet (Methode A). Bei einer anderen Methode (B) probiert er einen zufällig ausgewählten Schlüssel, und wenn er nicht paßt, so schüttelt er den Schlüsselbund und probiert wieder einen zufällig ausgewählten Schlüssel.
- (a) Die Anzahl der Versuche, die nach Methode A bzw. B nötig sind, um den passenden Schlüssel zu finden, werde durch die Zufallsgröße ξ_A bzw. ξ_B beschrieben. Man gebe die Verteilung dieser beiden Zufallsgrößen an.
- (b) Der Nachtwächter benutzt Methode A, wenn er nüchtern ist, und Methode B wenn er betrunken ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er in einer bestimmten Nacht betrunken ist betrage $\frac{1}{3}$. Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Betriebsleiter den Nachtwächter der Trunkenheit im Dienst zu recht bezichtigt, nachdem er gesehen hat, daß dieser schon 8-mal erfolglos versucht hat, die Tür zu öffnen ?
- 7.3. Ein Spieler erhalte beim Münzwurf 2^n Mark, falls Zahl erstmalig beim n -ten Wurf beobachtet wird.
- (a) Wie hoch muß der Einsatz des Spielers sein, wenn das Spiel gerecht sein soll, d.h. der Erwartungswert des Gewinnes gleich dem Einsatz ist ? (Petersburger Paradoxon)
- (b) Wie oft wird die Münze bei diesem Spiel im Mittel geworfen ?
- (c) Wie hoch muß der Einsatz des Spielers sein, wenn das Spiel spätestens beim 10. Wurf mit der Auszahlung von 2^{10} Mark abgebrochen wird ?
- 7.4. Bei einer Verkehrszählung ergibt sich, daß ein bestimmter Straßenabschnitt in einer Richtung in einer Stunde im Mittel von 240 Fahrzeugen passiert wird. Man berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß innerhalb von 15 Sekunden mehr als 3 Fahrzeuge die Zählstelle passieren, wenn die Anzahl der in diesem Zeitintervall vorüberfahrenden Fahrzeuge als Poisson-verteilt angesehen wird.
- 7.5. Es seien ξ_1, \dots, ξ_n unabhängige Zufallsgrößen und $\xi_{\min} = \min(\xi_1, \dots, \xi_n)$ und $\xi_{\max} = \max(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Man zeige die Gültigkeit der Beziehungen

$$P(\xi_{\min} \geq x) = \prod_{i=1}^n P(\xi_i \geq x); \quad P(\xi_{\max} < x) = \prod_{i=1}^n P(\xi_i < x).$$

7.6. Es sei $P_\xi(x) = P(\xi = x)$ und $F_\xi(x) = P(\xi \leq x)$. Man zeige für $x \geq 0$ die Gültigkeit von

$$F_{\xi^2}(y) = F_\xi(+\sqrt{y}) - F_\xi(-\sqrt{y}) + P_\xi(-\sqrt{y}).$$

7.7. Man zeige, daß die Zufallsgröße ξ genau dann von sich selbst nicht abhängt (d.h. ξ und ξ sind unabhängig), wenn $\xi = \text{const}$ ist.

8 Absolut stetige Zufallsgrößen

8.1. Eine Pumpe sei ununterbrochen in Betrieb, bis sie ausfalle. Die Zufallsgröße ξ , die die zufällige Dauer der Funktionsfähigkeit der Pumpe beschreibt, möge stetig verteilt sein mit einer Dichte der Form $f(x) = \frac{x}{\beta^2} \exp(-\frac{x}{\beta})$, $x > 0$, (Gammaverteilung). Weiter sei bekannt, daß Pumpen dieser Art im Mittel 100 Stunden laufen, bis sie ausfallen.

(a) Wie ist der Parameter β zu wählen, damit der Erwartungswert von ξ gleich der mittleren Laufzeit dieser Pumpen ist ?

(b) Man bestimme die folgenden Wahrscheinlichkeiten :

$$P(\xi \leq 100), \quad P(\xi \leq 200 | \xi \geq 100), \quad P(\xi \leq 300 | \xi \geq 200).$$

(c) Man löse a) und b) wenn die Dichte der Exponentialverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\beta} \exp(-\frac{x}{\beta}), \quad x > 0, \text{ verwendet wird.}$$

8.2. Auf einem Flughafen beantragen in einer Stunde im Mittel 20 Flugzeuge eine Landeerlaubnis. Die Anzahl der Flugzeuge, die in einer Zeit t eine Landeerlaubnis beantragen, soll als eine Poisson-verteilte Zufallsgröße betrachtet werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß

(a) in einer Minute 2 oder mehr Flugzeuge eine Landeerlaubnis beantragen ?

(b) nach Erteilung einer Landeerlaubnis die nächste Anforderung frühestens in 4 und spätestens in 6 Minuten erfolgt ?

8.3. Die Zufallsgröße ξ besitze eine Erlangverteilung mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)! \beta^n} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) x^{n-1}, \quad x > 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \beta > 0,$$

(Spezialfall der Gammaverteilung mit den Parametern $\alpha = n$ und β).

Man zeige, daß dann für die Verteilungsfunktion von ξ gilt

$$1 - F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) \left(\frac{x}{\beta}\right)^k.$$

Hinweis: ξ ist darstellbar als Summe von n unabhängigen und (mit dem Parameter β) identisch exponentialverteilten Zufallsgrößen, Zusammenhang zur Poissonverteilung nutzen

- 8.4. Ein Flugzeug bekommt für einen Linienflug einen Höhenkorridor im Bereich von 4300 m bis 4400 m vorgeschrieben. Bei Erreichen einer Höhe von 4350 m wird das Flugzeug auf Automatenflug umgestellt. Zu einem festen Zeitpunkt ist dann die tatsächliche Höhe eine normalverteilte Zufallsgröße mit dem Mittelwert $\mu = 4350$ m und der Varianz $\sigma^2 = 400$ m².
- Man berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zu einem vorgegebenen Zeitpunkt der Flug im Korridor verläuft.
 - Auf welche Höhe müßte der Automat eingestellt werden, damit die Wahrscheinlichkeit für das Unterfliegen des Korridors 0.5% beträgt.
- 8.5. Bei der automatischen Abfüllung von Bier in Flaschen ist die Abfüllmenge eine normalverteilte Zufallsgröße mit den bekannten Parametern $\mu = 500$ ml und $\sigma^2 = 4$ ml².
- Wie groß ist in einem Kasten von 20 Flaschen die durchschnittliche Anzahl der Flaschen, die weniger als 497 ml Bier enthalten ?
 - Das Leervolumen einer Flasche betrage 504 ml. Auf welchen Wert μ muß der Abfüllautomat eingestellt werden, damit die Flaschen beim Abfüllen höchstens mit der Wahrscheinlichkeit von 1% überlaufen.
- 8.6. Erfahrungsgemäß ist die Größe der aus einer bestimmten Produktion stammenden Widerstände eine normalverteilte Zufallsgröße mit den Parametern $\mu = 990\Omega$ und $\sigma = 20\Omega$. Alle Widerstände, die nicht in den Toleranzgrenzen von 950 Ω bis 1050 Ω liegen, sind als Ausschuß anzusehen.
- Welcher Anteil der gefertigten Widerstände ist Ausschuß ?
 - Durch Änderung der Technologie wurde der Mittelwert μ auf 1000 Ω erhöht. Entsteht dadurch ein Nutzen, wie groß ist er ?
 - Für den Einbau in Präzisionsgeräte sind Widerstände von 990 Ω bis 1010 Ω erforderlich. Wie groß darf σ maximal sein, wenn (bei $\mu = 1000\Omega$) 90 % der Widerstände die Bedingungen zum Einbau erfüllen sollen ?

9 Zufallsvektoren, Korrelation

- 9.1. Ein Geschäft bietet zwei verschiedene Sorten von Glühbirnen an. Die Lebensdauer einer Glühbirne lasse sich jeweils durch eine exponentialverteilte Zufallsgröße mit einem Erwartungswert von 10000 bzw. 20000 Stunden je nach Sorte angemessen beschreiben. Ein Kunde kauft von jeder Sorte genau eine Glühbirne B_1 bzw. B_2 und vermutet, daß bei gleichzeitiger Benutzung zuerst B_1 und danach B_2 ausfällt. Unter der Annahme, daß die Glühbirnen unabhängig voneinander ausfallen, berechne man die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die beiden Glühbirnen nicht in der vermuteten Reihenfolge ausfallen.
- 9.2. Sind die Zufallsgrößen ξ_1 und ξ_2 unkorreliert bzw. unabhängig, wenn gilt
- $\xi_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\xi_2 = \xi_1^2 - 1$,

(b) $\xi_1 = \sin \eta$, $\xi_2 = \cos \eta$, wobei $\eta \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$ (Gleichverteilung auf $(0, 2\pi)$)

(c) $f_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{für } x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ (Gleichverteilung auf dem Einheitskreis) ?

9.3. Man zeige, daß für die Zufallsgrößen ξ und η mit dem Korrelationskoeffizienten $\rho = \rho(\xi, \eta)$

$$|\rho| = 1 \iff P(\eta = a\xi + b) = 1, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

gilt.

9.4. Es seien ξ_1 und ξ_2 unabhängige $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilte Zufallsgrößen und es gelte $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$ sowie $\eta_2 = \xi_1 - \xi_2$.

(a) Sind η_1 und η_2 unkorreliert ?

(b) Sind η_1 und η_2 unabhängig ?

10 Bedingte Erwartung

10.1. Es werden zwei Würfel geworfen, ξ_1 und ξ_2 bezeichnen die Augenzahlen des 1. und 2. Würfels, η sei die Augensumme. Man bestimme

(a) $P(\xi_1 = i | \eta = 9)$, $i = 1, \dots, 6$,

(b) $\mathbf{E}(\xi_1 | \eta = 9)$,

(c) die Verteilung von $\mathbf{E}(\xi_1 | \eta)$,

(d) $\mathbf{E}\mathbf{E}(\xi_1 | \eta)$.

10.2. Man finde Beispiele von Zufallsgrößen ξ und η , die nicht unabhängig sind, für die aber dennoch $\mathbf{E}(\xi | \eta) = \mathbf{E}\xi$ gilt.

10.3. Es seien ξ_1 und ξ_2 unabhängige $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilte Zufallsgrößen und es gelte $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$ sowie $\eta_2 = \xi_1 - \xi_2$.

Sind $\mathbf{E}(\eta_1 | \xi_1)$ und $\mathbf{E}(\eta_2 | \xi_1)$ unabhängig (vgl. Aufgabe 9.4) ?

10.4. Es seien ξ_1, \dots, ξ_n identisch und unabhängig verteilte Zufallsgrößen (mit endlichem Erwartungswert) und $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$. Man zeige, daß $\mathbf{E}(\xi_1 | S_n) = \frac{S_n}{n}$ gilt.

10.5. Es seien $\xi_1, \dots, \xi_n, \tau$ unabhängige Zufallsgrößen, ξ_1, \dots, ξ_n seien identisch verteilt, es gelte $\tau \in \{1, \dots, n\}$ und $S_\tau = \sum_{i=1}^{\tau} \xi_i$. Man zeige $\mathbf{E}(S_\tau | \tau) = \tau \mathbf{E}\xi_1$ und $\mathbf{E}S_\tau = \mathbf{E}\tau \mathbf{E}\xi_1$.

10.6. Der zweidimensionale Zufallsvektor (ξ, η) sei in einem Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 2)$ gleichmäßig verteilt. Man bestimme

(a) die gemeinsame Dichte $f_{\xi\eta}(x, y)$,

- (b) die Randdichten $f_\xi(x)$, $f_\eta(y)$ und die Randverteilungsfunktionen $F_\xi(x)$, $F_\eta(y)$,
- (c) die bedingten Verteilungsdichten $f_{\xi|\eta}(x|y)$ und $f_{\eta|\xi}(y|x)$,
- (d) die bedingten Erwartungswerte $\mathbf{E}(\xi|\eta = y)$ und $\mathbf{E}(\eta|\xi = x)$,
- (e) den Korrelationskoeffizienten $\rho(\xi, \eta)$.

11 Funktionen von Zufallsgrößen

- 11.1. Die Kantenlänge eines Würfels sei eine im Intervall $[0, a]$, $a > 0$, gleichverteilte Zufallsgröße. Man bestimme die Verteilungsdichte und den Erwartungswert des Volumens des Würfels.
- 11.2. Es sei ξ eine Zufallsgröße mit einer absolut stetigen Verteilungsfunktion $F_\xi(x)$. Welche Verteilung besitzt die Zufallsgröße $\eta = F_\xi(\xi)$?
- 11.3. Es seien ξ und η unabhängige auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsgrößen. Man bestimme die Verteilung von $\nu = \xi + \eta$ und vergleiche sie mit der Verteilung von $\tilde{\nu} = 2\xi$.
- 11.4. Die Koordinaten eines Punktes in der Ebene seien unabhängige $N(0, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsgrößen ($\sigma > 0$). Man bestimme die Verteilungsdichte und den Erwartungswert vom Abstand des Punktes zum Koordinatenursprung.

12 Konvergenzbegriffe

- 12.1. Es sei (η_n) eine Folge unabhängiger und identisch exponentialverteilter Zufallsgrößen. Man zeige

- (a) für $(\xi_n) = \left(\frac{\eta_n}{\ln n}\right)$ gilt $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ aber nicht $\xi_n \xrightarrow{\text{f.s.}} 0$.
- (b) für $(\xi_n) = \left(\frac{\eta_n}{(\ln n)^2}\right)$ gilt $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ und $\xi_n \xrightarrow{\text{f.s.}} 0$.

- 12.2. Man zeige

- (a) wenn $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$ und $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \eta$ dann sind ξ und η äquivalent, d.h. $\mathbf{P}(\xi \neq \eta) = 0$.
- (b) wenn $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$ und $\eta_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \eta$ dann gilt $a\xi_n + b\eta_n \xrightarrow{\mathbf{P}} a\xi + b\eta$ (a, b reelle Konstante).

- 12.3. Es sei (η_n) eine Folge unabhängiger auf dem Intervall $(0, 1)$ gleichverteilter Zufallsgrößen. Man zeige, daß dann

$$\xi_n = \left(\frac{1}{\eta_1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\eta_n}\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{\text{f.s.}} e$$

gilt.

12.4. Es sei $f(x)$ eine auf dem Intervall $[0, 1]$ stetige Funktion und $f_n(x)$ ein Polynom in x der Gestalt

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (\text{Bernstein-Polynom}).$$

Man zeige (mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Hilfsmitteln), daß $f_n(x)$ für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiert.

13 Charakteristische Funktionen

13.1. Es seien ξ , η und ν_n Zufallsgrößen, für die gilt

- ξ ist im Intervall $[-1, 1]$ gleichverteilt,
- $\mathbf{P}(\eta = 1) = \mathbf{P}(\eta = -1) = 0.5$
- $\nu_n = \sum_{k=1}^n \frac{\eta_k}{2^k}$, $n = 1, 2, \dots$, wobei (η_k) eine Folge unabhängig und identisch verteilter

Zufallsgrößen mit der gleichen Verteilung wie η ist.

Man bestimme die charakteristischen Funktionen φ_ξ , φ_η und φ_{ν_n} und untersuche ν_n für $n \rightarrow \infty$.

(Hinweis : $\prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{t}{2^k} = \frac{\sin t}{t}$, $t \neq 0$)

13.2. (a) Die Zufallsgröße ξ besitze eine Cauchy-Verteilung mit der Dichtefunktion

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Man bestimme die charakteristische Funktion von ξ .

(b) Sei (ξ_k) eine Folge unabhängig und identisch verteilter Zufallsgrößen mit der gleichen Verteilung wie ξ . Welche charakteristische Funktion hat $\eta = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k$?

13.3. Die Zufallsgröße ξ besitze eine Exponentialverteilung mit dem Parameter λ . Man berechne die Momente $\mathbf{E}\xi^k$, $k = 1, 2, \dots$, mit Hilfe der charakteristische Funktion φ_ξ .

13.4. Es sei ξ eine ganzzahlige Zufallsgröße. Man zeige, daß dann

$$p_k = \mathbf{P}(\xi = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \varphi_\xi(t) dt,$$

für $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, gilt.

- 13.5. Für die charakteristische Funktion der Zufallsgröße ξ gelte $|\varphi_\xi(t_0)| = 1$ für ein $t_0 \neq 0$. Man zeige, daß ξ eine Gitterstruktur mit der Schrittlänge $h = \frac{2\pi}{t_0}$ besitzt, d.h. es gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(\xi = a + kh) = 1,$$

wobei a eine reelle Konstante ist.

- 13.6. Es seien φ_1 , φ_2 und φ_3 charakteristische Funktionen und es gelte $\varphi_1\varphi_2 = \varphi_1\varphi_3$. Folgt daraus $\varphi_2 = \varphi_3$?

14 Grenzwertsätze

- 14.1. Ein Angestellter verläßt an den 225 Arbeitstagen eines Jahres sein Büro kurz nach Dienstschuß. Die Dauer der zusätzlichen Arbeitszeit läßt sich mit einer exponentialverteilten Zufallsgröße mit dem Erwartungswert von 5 Minuten angemessen beschreiben. Die Zufallsgrößen seien als unabhängig vorausgesetzt. Man berechne näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Angestellte dadurch in einem Jahr insgesamt mehr als 15 Überstunden arbeitet.

Wie kann man diesen Wert exakt berechnen ?

- 14.2. Bei der Verpackung von Kartoffeln in Beutel kann das Normgewicht von 5 kg i.allg. nicht exakt eingehalten werden. Die Erfahrung zeigt, daß das Füllgewicht eines Beutels durch eine Zufallsgröße $\xi = \eta + 5$ beschrieben werden kann. Dabei ist η auf dem Intervall $(-0.2, 0.3)$ gleichverteilt. Die abgefüllten Beutel sollen auf einem Kleintransporter befördert werden.

Man berechne näherungsweise die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß die zulässige Nutzlast von 1000 kg bei Zuladung von 197 bzw. 198 Beuteln überschritten wird.

- 14.3. (a) Für $0 < \gamma < 1$ seien z_γ bzw. $\chi_{n,\gamma}^2$ das Quantil einer $N(0,1)$ - bzw. χ_n^2 -verteilten Zufallsgröße. Mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes zeige man, daß gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\chi_{n,\gamma}^2 - n}{\sqrt{2n}} = z_\gamma.$$

- (b) Man berechne mit Hilfe von a) einen Näherungswert für $\chi_{100,0.95}^2$ und vergleiche diese Approximation mit dem exakten Quantil (z.B. Tabelle in Göhler).

- 14.4. Bei einem Meßvorgang wird angenommen, daß er durch eine Zufallsgröße mit einem unbekanntem Erwartungswert μ und einer Streuung $\sigma = 0.1$ [Maßeinheiten] angemessen beschrieben werden kann. Wieviele getrennte Messungen (ohne gegenseitige Beeinflussung der Ergebnisse) müssen durchgeführt werden, daß mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % der Betrag der Differenz zwischen dem arithmetischen Mittel der Meßwerte und μ kleiner als 0.02 [Maßeinheiten] ist ?

Man beantworte diese Frage durch Anwendung

-
- (a) der Tschebyscheffschen Ungleichung,
(b) des Zentralen Grenzwertsatzes.
- 14.5. Wieviele Versuche muß man zur Berechnung des Integrals $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ mit der Monte-Carlo-Methode durchführen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % einen relativen Fehler kleiner 1 % zu erreichen ?
- 14.6. Zur Untersuchung von Wählerwanderungen befragt ein Meinungsforschungsinstitut 800 zufällig ausgewählte wahlberechtigte Bürger nach ihrer letzten Wahlentscheidung. Für die Partei A haben bei der Wahl 0.2 % der Wähler gestimmt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter den befragten Bürgern höchstens einer die Partei A gewählt hat, berechne man unter geeigneten Annahmen
- (a) mit Hilfe der Binomialverteilung,
(b) durch Anwendung des Poissonschen Grenzwertsatzes,
(c) zum Vergleich durch Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes sowohl ohne als auch mit "Stetigkeitskorrektur".