Analysis 3 – Serie07 – Georg Kuschk

Bemerkung :
Die Konstanten C besitzen nicht immer dieselben Werte, sie können je nach Rechenschritt in eine neue Konstante C übergehen.

7.1 a)
Differentiation der Kurvenschar :

$$y(x)^2 = Cx \Rightarrow y(x)^2 - Cx = 0 \qquad (*1)$$

Ableiten nach x liefert :

$$2y(x)\cdot y(x)' - C = 0 \qquad (*2)$$

Gleichung (*2) nach C umstellen :

$$C = 2yy'$$

und in (*1) einsetzen :

$$y^2 - 2yy'x = 0$$

$$\Rightarrow y - 2y'x = 0$$

$$\Rightarrow y' = \frac{y}{2x}$$

Hieraus folgt sofort eine Differentialgleichung für die Orthogonaltrajektorien :

$$y' = -\frac{1}{\frac{y}{2x}} = -\frac{2x}{y}$$

Die Differentialgleichung lösen :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}$$

$$\Rightarrow \int y\,dy = -\int 2x\,dx + C$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = -x^2 + C$$

Lösungen sind somit die Ellipsen $2x^2 + y^2 = C$.

7.2 a)

$$(x^2-1)y' + 2xy = xy^2$$

$$y' = \frac{xy^2 - 2xy}{x^2-1} = \frac{x}{x^2-1}\left(y^2 - y\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2-1}\left(y^2 - y\right)$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y^2-y}\,dy = \int \frac{x}{x^2-1}\,dx + C \qquad (*3)$$

linke Seite von (*3) :

$$\int \frac{1}{y^2-y}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{2}{y^2-y}\,dy = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y}\right)dy = \frac{1}{2}\left(\ln|y-2| - \ln|y|\right)$$

zu 7.2 a)

rechte Seite von (*3) :

$$\int \frac{x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}dx \qquad \text{Substitution : } z \coloneqq x^2-1 \;\Rightarrow dz = 2xdx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{z}dz = \frac{1}{2}\ln|z| = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|$$

Somit kann (*3) geschrieben werden als

$$\frac{1}{2}\left(\ln|y-2| - \ln|y|\right) = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right| + C$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{y-2}{y}\right| = \ln\left|x^2-1\right| + C$$

$$\Rightarrow \left|\frac{y-2}{y}\right| = \left|x^2-1\right| \cdot e^C$$

$$\Rightarrow \left|1-\frac{2}{y}\right| = \left|x^2-1\right| \cdot C$$

Fallunterscheidung bzgl. y :

1. Fall : $0 < y < 2$

$$1-\frac{2}{y} = C \cdot \left|x^2-1\right|$$

$$\Rightarrow \frac{2}{y} = 1 - C \cdot \left|x^2-1\right|$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{1 - C \cdot \left|x^2-1\right|}$$

2. Fall : $\{y : y \le 0\} \cup \{y : y \ge 2\}$

$$1-\frac{2}{y} = -C \cdot \left|x^2-1\right|$$

$$\Rightarrow \frac{2}{y} = 1 + C \cdot \left|x^2-1\right|$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{1 + C \cdot \left|x^2-1\right|}$$

Zur Eindeutigkeit :

$$y' = f(x,y) = \frac{xy^2 - 2xy}{x^2-1}$$

$$\frac{df}{dy} = \frac{2xy - 2x}{x^2-1} = \frac{2x}{x^2-1}(y-1) < \infty$$

Das AWP ist überall eindeutig lösbar, da die Lipschitz-Bedingung jedesmal erfüllt ist.

7.2 b)

$$y' = 3|y|^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3|y|^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{3}|y|^{-\frac{2}{3}}\,dy = \int dx + C \qquad \text{mit } y \neq 0$$

$$\Rightarrow |y|^{\frac{1}{3}} = x + C$$

$$\underline{\Rightarrow y = \pm(x+C)^3} \qquad \text{mit } x \neq -C\,,\ x \in R$$

Zur Eindeutigkeit :

$f(x,y) = 3|y|^{\frac{2}{3}}$ ist in $R^2 \setminus (R \times \{0\})$ stetig partiell nach y differenzierbar, also lokal Lipschitz-stetig bzgl. y.
Da f in R^2 stetig ist, folgt die eindeutige Lösbarkeit aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz.
Für y=0 ist die Lipschitz-Bedingung nicht erfüllt. Somit liefert y=0 keine eindeutig bestimmte Lösung des AWP.

7.3)

Die Geschwindigkeit $\tilde{v}$ des Schwimmers über dem Flussboden setzt sich zusammen aus der Wassergeschwindigkeit $\vec{w}$ und seiner auf den Punkt (0,0) gerichteten Relativgeschwindigkeit.

Es gilt somit $\tilde{v} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$

Für die Bahnkurve $y = y(x)$ ergibt sich hieraus

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{w - \frac{vy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{-\frac{vx}{\sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{y}{x} - \frac{w}{vx} \cdot \sqrt{x^2+y^2} = \frac{y}{x} - \frac{w}{v} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2}}$$

$$= \frac{y}{x} - \frac{w}{v} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \qquad (*4)$$

Lösen der Differentialgleichung :

Substitution : $z := \dfrac{y}{x}$ d.h. $y = zx$ d.h. $y' = z + z'x$

Hieraus folgt mit (*4) :

$$y' = z + z'x = z - \frac{w}{v}\sqrt{1+z^2}$$

$$\Rightarrow z' = -\frac{w}{vx}\sqrt{1+z^2}$$

zu 7.3)

$$\Rightarrow \frac{z'}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+z^2}} = -\frac{w}{vx}$$

$$\Rightarrow \int \frac{\frac{dz}{dx}}{1+z^2}\,dx = \int \frac{dz}{dx(1+z^2)}\,dx = -\int \frac{w}{vx}\,dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1+z^2}\,dz = -\frac{w}{v}\cdot \int \frac{1}{x}\,dx \quad + C$$

$$\Rightarrow ArcSinh(z) = -\frac{w}{v}\ln|x| + C$$ Betrag von x kann wegfallen, da $0 < x < 1$

$$\Rightarrow ArcSinh\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{w}{v}\ln x + C$$

$$\Rightarrow y = x\cdot Sinh\left(-\frac{w}{v}\ln x\right) = \underline{\frac{1}{2}\left(x^{1-\frac{w}{v}} - x^{1+\frac{w}{v}}\right)}$$

<u>Wann wird das Ziel (0,0) erreicht ?</u>

<u>Im Fall w > v</u> ist $\lim\limits_{x\to+0} y(x) = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+0}\left(x^{1-\frac{w}{v}} - x^{1+\frac{w}{v}}\right) = \infty$, d.h. der Schwimmer kommt nie an.

<u>Im Fall w = v</u> ist $\lim\limits_{x\to+0} y(x) = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+0}\left(x^{1-\frac{w}{v}} - x^{1+\frac{w}{v}}\right) = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+0}\left(x^0 - x^2\right) = \frac{1}{2}$

, d.h. der Schwimmer kommt nicht am Ziel (0,0) an.

<u>Im Fall w < v</u> ist $\lim\limits_{x\to+0} y(x) = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+0}\left(x^{1-\frac{w}{v}} - x^{1+\frac{w}{v}}\right) = 0$, d.h. der Schwimmer erreicht das Ziel (0,0).

7.4 a)

$$y' = \frac{x-y+1}{x+y-2}$$

Die Gleichung ist vom Typ $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

Wegen $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, hat das Gleichungssystem

$x - y + 1 = 0$

$x + y - 2 = 0$

eine eindeutige Lösung

$\Rightarrow x + x + 1 = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$, d.h. $x_0 = \frac{1}{2}$ und $y_0 = \frac{3}{2}$

zu 7.4 a)

Es gilt dann :

$$a_1x+b_1y+c_1=a_1(x-x_0)+b_1(y-y_0)$$

$$a_2x+b_2y+c_2=a_2(x-x_0)+b_2(y-y_0)$$

Einführung neuer Unbekanter :

$$\bar{x}=x-x_0=x-\frac{1}{2}$$

$$\bar{y}=y-y_0=y-\frac{3}{2}$$

Daraus folgt die homogene Differentialgleichung

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\bar{x}+\bar{y}} \qquad (*8)$$

Setze $u:=\frac{\bar{y}}{\bar{x}}$ d.h. $\bar{y}=\bar{x}u$

Durch Differentiation folgt

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}=u+\bar{x}\frac{du}{d\bar{x}}$$

Wegen $\bar{y}=\bar{x}u$ und mit (*8) folgt dann

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}=u+\bar{x}\frac{du}{d\bar{x}}=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\bar{x}+\bar{y}}=\frac{\bar{x}-\bar{x}u}{\bar{x}+\bar{x}u}=\frac{\bar{x}(1-u)}{\bar{x}(1+u)}=\frac{1-u}{1+u} \qquad (\bar{x}\neq 0)$$

D.h. $u+\bar{x}\frac{du}{d\bar{x}}=\frac{1-u}{1+u}$

$$\Rightarrow \bar{x}\frac{du}{d\bar{x}}=\frac{1-u}{1+u}-\frac{u(1+u)}{1+u}=\frac{1-2u-u^2}{1+u}$$

Trennen der Variablen :

$$\frac{d\bar{x}}{\bar{x}}=\frac{1+u}{1-2u-u^2}\,du$$

Integration :

$$\int\frac{1}{\bar{x}}\,d\bar{x}=-\frac{1}{2}\int\frac{-2-2u}{1-2u-u^2}\,du+C$$

$$\Rightarrow \ln|\bar{x}|=-\frac{1}{2}\ln(1-2u-u^2)+C$$

$$2\ln|\bar{x}|=-\ln(1-2u-u^2)+C$$

$$\bar{x}^2=\frac{1}{1-2u-u^2}\cdot e^C=\frac{C}{1-2u-u^2}$$

$$\Rightarrow \bar{x}^2(1-2u-u^2)-C=0$$

$$\Rightarrow -u^2-2u+1-\frac{C}{\bar{x}^2}=0$$

$$\Rightarrow u^2+2u-\left(1-\frac{C}{\bar{x}^2}\right)=0$$

quadratische Gleichung lösen :

$$u=-1\pm\sqrt{1+\left(1-\frac{C}{\bar{x}^2}\right)}=-1\pm\sqrt{2-\frac{C}{\bar{x}^2}}$$

Wegen $u=\frac{\bar{y}}{\bar{x}}$ gilt

$$u=\frac{\bar{y}}{\bar{x}}=-1\pm\sqrt{2-\frac{C}{\bar{x}^2}}$$

zu 7.4 a)

$$\Rightarrow \bar{y} = -\bar{x} \pm \sqrt{\left(2 - \frac{C}{\bar{x}^2}\right) \cdot \bar{x}^2}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = -\bar{x} \pm \sqrt{2\bar{x}^2 - C}$$

Rückkehr zu den ursprünglichen Variablen mittels $\bar{x} = x - \frac{1}{2}$ und $\bar{y} = y - \frac{3}{2}$

$$y - \frac{3}{2} = -x + \frac{1}{2} \pm \sqrt{2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - C}$$

$$\underline{\Rightarrow y = -x + 2 \pm \sqrt{2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - C}}$$

7.4 b)

$$y' = \frac{y}{1 + x^2} + 2x - 1 \qquad \text{(*5)}$$

$\Rightarrow$ Inhomogene DGL der Art $y' = g(x) \cdot y + h(x)$ $\quad mit\ g(x) = \frac{1}{1 + x^2}\ und\ h(x) = 2x - 1$

Zuerst die zugehörige homogene lineare DGL lösen $(d.h. \quad h(x) \equiv 0)$:

$$y' = \frac{y}{1 + x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{1 + x^2} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1 + x^2} \qquad (für\ y \neq 0)$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{1 + x^2} dx + C$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \arctan x + C$$

$\Rightarrow y = e^{\arctan x + C}$ (Betrag überflüssig, da Potenz immer positiv)

$$\Rightarrow y = e^C \cdot e^{\arctan x}$$

$$\Rightarrow y = C \cdot e^{\arctan x}$$

Nun die inhomogene DGL lösen :
Ansatz :
Variation der Konstanten - Statt der Konstanten C setzt man die zu bestimmende unbekannte Funkton $C(x)$.

D.h. $y = C(x) \cdot e^{\arctan x}$ (*6)

$$\Rightarrow y' = C'(x) \cdot e^{\arctan x} + C(x) \cdot \frac{e^{\arctan x}}{1 + x^2} \qquad \text{(*7)}$$

Einsetzen von (*6) und (*7) in (*5) liefert :

$$C'(x) \cdot e^{\arctan x} + C(x) \cdot \frac{e^{\arctan x}}{1 + x^2} = \frac{C(x) \cdot e^{\arctan x}}{1 + x^2} + 2x - 1$$

$$\Rightarrow C'(x) = \frac{2x - 1}{e^{\arctan x}}$$

$$\Rightarrow C(x) = \int_0^x \frac{2t - 1}{e^{\arctan t}} dt + C = \left[\frac{1 + t^2}{e^{\arctan t}}\right]_0^x + C = \frac{1 + x^2}{e^{\arctan x}} - 1 + C = \frac{1 + x^2}{e^{\arctan x}} + C$$

Einsetzen in (*6) liefert :

$$y = \left(\frac{1 + x^2}{e^{\arctan x}} + C\right) \cdot e^{\arctan x} \underline{= 1 + x^2 + C \cdot e^{\arctan x}}$$