Analysis 3 – Serie11 – Georg Kuschk

11.1 a)

gegeben : $y''+p^2 y = x$ mit $y(0) = y(1) = 0$

Überführung in halbhomogenen Fall :

Man sieht, dass $z(x) = \frac{x}{p^2}$ Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist.

Daher der Ansatz :

$$u(x) := y(x) - \frac{x}{p^2} \Rightarrow y(x) = u(x) + \frac{x}{p^2} \Rightarrow y''(x) = u''(x)$$

Man erhält somit das halbhomogene Problem

$$u''(x) + p^2\left(u(x) + \frac{x}{p^2}\right) = x \quad \rightarrow \quad \underline{u''(x) + p^2 u(x) = 0} \qquad (*1)$$

mit

$$u(0) = y(0) - \frac{0}{p^2} = 0 \quad \text{und} \quad u(1) = y(1) - \frac{1}{p^2} = -\frac{1}{p^2}$$

Lösen der Differentialgleichung (*1) :

$$l^2 + p^2 = 0$$

$$\rightarrow l_1 = ip \quad , \quad l_2 = -ip$$

$$\rightarrow u_1(x) = e^{ipx} \quad , \quad u_2(x) = e^{-ipx}$$

In reelle Lösungen umwandeln :

$$u_1(x) = \cos(px) \quad , \quad u_2(x) = \sin(px)$$

$$\underline{u(x) = C_1 \cos(px) + C_2 \sin(px)}$$

Nun die Konstanten mittels der Randbedingungen bestimmen :

$$u(0) = C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0)$$

$$\underline{0 = C_1}$$

und

$$u(1) = C_1 \cos(p) + C_2 \sin(p)$$

$$-\frac{1}{p^2} = 0 + 0 \quad \text{falsche Aussage}$$

Die halbhomogene Differentialgleichung ist somit nicht lösbar und wegen Rücksubstitution ist folglich auch die gegebene inhomogene Differentialgleichung **nicht lösbar**.

11.1 b)

gegeben : $y''+p^2 y=-p^2$ mit $y(0)=0$ und $y(1)=-2$

Überführung in halbhomogenen Fall :

Man sieht, dass $z(x)=-1$ Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist.

Daher der Ansatz :

$u(x):=y(x)-(-1) \Rightarrow y(x)=u(x)-1 \Rightarrow y''(x)=u''(x)$

Man erhält somit das halbhomogene Problem

$$u''(x)+p^2(u(x)-1)=-p^2 \quad \rightarrow \quad \underline{u''(x)+p^2 u(x)=0} \qquad (*2)$$

mit

$u(0)=y(0)+1=1$ und $u(1)=y(1)+1=-1$

Lösung der Differentialgleichung (*2) :

$\underline{u(x)=C_1\cos(px)+C_2\sin(px)}$

Nun die Konstanten mittels der Randbedingungen bestimmen :

$u(0)=C_1\cos(0)+C_2\sin(0)$

$\underline{1=C_1}$

und

$u(1)=C_1\cos(p)+C_2\sin(p)$

$-1=-1+0 \quad \rightarrow C_2 \in R$

Hieraus folgt nun

$u(x)=\cos(px)+C_2\sin(px) \quad ,C_2 \in R$

und daraus

$y(x)=u(x)-1$

$y(x)=\cos(px)+C_2\cdot\sin(px)-1 \quad ,C_2 \in R$

Die gegebene inhomogene Differentialgleichung ist also **<u>lösbar, jedoch nicht eindeutig lösbar</u>**.

11.2 a)

gegeben : $\widetilde{L}[y] \equiv a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$, a_j, f stetig in [a,b] mit $a_2 > 0$ in [a,b]

Division durch a_2 ($a_2 > 0$ nach Voraussetzung) liefert :

$$y'' + \frac{a_1}{a_2} y' + \frac{a_0}{a_2} y = \frac{f(x)}{a_2} \qquad (*3)$$

Zeigen, dass zu (*3) eine äquivalente Differentialgleichung der Form

$$(p \cdot y')' + q \cdot y = r \qquad (*4)$$

mit $p(x) > 0$ in [a,b] , $p \in C^1[a,b]$, $q, r \in C[a,b]$

existiert :

Setzt man $p(x) := e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx}$ (p(x)>0 und stetig , da a_1, a_2 nach Voraussetzung stetig sind , das Integral existiert) , so lässt sich (*4) schreiben als :

$$(p \cdot y')' + q \cdot y = r \;\rightarrow\; py'' + p' y' + qy = r$$

$$\rightarrow e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx} \cdot y'' + \frac{a_1(x)}{a_2(x)} \cdot e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx} \cdot y' + qy = r$$

Division durch $p = e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx} > 0$ liefert :

$$y'' + \frac{a_1}{a_2} y' + \frac{q}{e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx}} y = \frac{r}{e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx}}$$

Um diese Differentialgleichung auf die Form von (*3) zu bringen, muss gelten :

$$\frac{q}{e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx}} = \frac{a_0}{a_2} \;\rightarrow q = \frac{a_0}{a_2} \cdot e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx}$$

sowie

$$\frac{r}{e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx}} = \frac{f(x)}{a_2} \rightarrow r = \frac{f(x)}{a_2} \cdot e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx}$$

q und r sind offensichtlich stetig, da a_1, a_2, f stetig sind.

Es gilt also

$$(p \cdot y')' + q \cdot y = r$$

$$\equiv py'' + p' y' + qy = r$$

$$\equiv y'' + \frac{p'}{p} y' + \frac{q}{p} y = \frac{r}{p}$$

$$\equiv y'' + \frac{\frac{a_1(x)}{a_2(x)} \cdot e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx}}{e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx}} y' + \frac{\frac{a_0(x)}{a_2(x)} \cdot e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx}}{e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx}} y = \frac{\frac{f(x)}{a_2(x)} \cdot e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx}}{e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx}}$$

$$\equiv y'' + \frac{a_1(x)}{a_2(x)} y' + \frac{a_0(x)}{a_2(x)} y = \frac{f(x)}{a_2(x)}$$

Es wurde also gezeigt, dass zur gegebenen DGL (*3) eine äquivalente DGL der Form (*4) existiert.

11.2 b)

Zunächst zeigen, dass $uL[v]-vL[u]=[p(uv'-u'v)]'$:

Die linke Seite :

$$\begin{aligned} uL[v]-vL[u] &= u\big((pv')'+qv\big)-v\big((pu')'+qu\big)=u\big(p'v'+pv''+qv\big)-v\big(p'u'+pu''+qu\big) \\ &= p'uv'+puv''-p'u'v-pu''v \end{aligned}$$

Die rechte Seite :

$$\begin{aligned} [p(uv'-u'v)]' &= p\big(uv'-u'v\big)'+p'\big(uv'-u'v\big)=p\big(u'v'+uv''-u''v-u'v'\big)+p'uv'-p'u'v \\ &= puv''-pu''v+p'uv'-p'u'v \end{aligned}$$

Die linke und die rechte Seite stimmen somit überein, es gilt also $uL[v]-vL[u]=[p(uv'-u'v)]'$.

$$\Rightarrow \int_a^b \big(uL[v]-vL[u]\big)dx=\int_a^b [p\big(uv'-u'v\big)]'\,dx = p\big(uv'-u'v\big)\Big|_a^b$$

$$= p(b)u(b)v'(b)-p(b)u'(b)v(b)-\big(p(a)u(a)v'(a)-p(a)u'(a)v(a)\big)$$

Die Funktionen $u,v\in C^2[a,b]$ erfüllen nach Voraussetzung die Sturmschen Randbedingungen :

$R_1[y]\equiv a_1y(a)+a_2p(a)y'(a)=0$ und

$R_2[y]\equiv b_1y(b)+b_2p(b)y'(b)=0$

11.3)

Nach Voraussetzung ist $L[y_1] = L[y_2] = 0$

$\Rightarrow \left(L[y_2] - L[y_1]\right)\left(y_1 + y_2\right) = 0$

$\Rightarrow y_1 L[y_2] - y_2 L[y_1] = 0 = [p(y_1 y_2' - y_1' y_2)]' \qquad \forall x \in [a,b]$

Integration liefert

$p y_1 y_2' - p y_1' y_2 = C \qquad , C \in R$

Wegen $y_1(x_0) = y_1(x_1) = 0$ gilt

$-p(x_0) y_1'(x_0) y_2(x_0) = C \qquad , C \in R$

und

$-p(x_1) y_1'(x_1) y_2(x_1) = C \qquad , C \in R$

D.h.

$$y_2(x_0) = \frac{-C}{p(x_0) y_1'(x_0)} \qquad , C \in R \qquad (*5)$$

und

$$y_2(x_1) = \frac{-C}{p(x_1) y_1'(x_1)} \qquad , C \in R \qquad (*6)$$

Da die Nullstellen x_0, x_1 aufeinanderfolgend sind, gilt also $x_0 \neq x_1$.

Hieraus folgt $y_1'(x_0) \neq 0$ und $y_1'(x_1) \neq 0$, denn sonst wäre wegen $y_1 \in C^2[a,b]$ in einer Umgebung von x_0 $y_1' = 0$ und somit $x_0 = x_1$.

Weil $y_1'(x_0) \neq 0$ und $y_1'(x_1) \neq 0$, und aufgrund der Stetigkeit von y_1' haben $y_1'(x_0)$ und $y_1'(x_1)$ verschiedene Vorzeichen.

Weil $\forall x \in [a,b]$: (C hat das gleiche Vorzeichen , $p(x) > 0$) gilt,
und $y_1'(x_0)$ sowie $y_1'(x_1)$ verschiedene Vorzeichen haben, haben wegen (*5) und (*6) auch $y_2(x_0)$ und $y_2(x_1)$ verschiedene Vorzeichen.

Aufgrund der Stetigkeit von y_2 und dem Zwischenwertsatz von Bolzano folgt schliesslich, dass y_2 eine Nullstelle $x_2 \in \left(x_0, x_1\right)$ besitzt.