<u>Analysis 3 – Serie12 – Georg Kuschk</u>

12.1 a)

$A = [0,1] \cap Q$

Da $A \subset Q$, enthält A abzählbar viele Elemente.

A lässt sich nun also als Vereinigung von abzählbar vielen Intervallen $I_n = [n,n]$ darstellen.

Das Lebesgue-Maß dieser I_n ist 0 .

Wegen $0 \leq l\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) = 0$ ist folglich $l(A) = 0$, und A ist somit eine Lebesgue-messbare Menge mit Lebesgue-Maß Null.

12.1 b)

??? Querstreifen = Komplement ???

12.1 c)

$A = [0,1] \setminus Q$

Der Rand von A besteht aus den Elementen von A, in deren e -Umgebung sowohl Elemente aus A als auch aus A' liegen .

Dies ist aber wegen der Dichtheit von Q in R für alle $x \in A$ der Fall.

D.h. A ist eine abgeschlossene Menge und somit Lebesgue-messbar und für das Lebesgue-Maß gilt :

$l(A) = l([0,1] \setminus Q) \ = l([0,1] \setminus (Q \cap [0,1])) \ = l([0,1]) - l(Q \cap [0,1]) \ = 1 - 0$

$\rightarrow l(A) = 1$

12.1 d)

$A = ([0,1] \setminus Q)^o$ = Inneres von A

$A = ([0,1] \setminus Q)^o \ = ([0,1] \setminus Q) \setminus \text{Rand}([0,1] \setminus Q) \ = ([0,1] \setminus Q) \setminus ([0,1] \setminus Q) \ = \varnothing$

$\rightarrow A$ ist eine Lebesgue-messbare Menge vom Maß Null. $\quad (l(A) = 0)$

12.1 e)

???

12.2 a)

Zeigen, dass durch $x \sim y : x - y \in Q$ eine Äquivalenzrelation im R^1 erklärt wird.

Folgende drei Eigenschaften sind zu zeigen :

- Reflexivität : $\forall x \in R$ ist $x - x = 0 \in Q$, d.h. $x \sim x$
- Transitivität : $\forall x, y, z \in R$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$ ist $x - y \in Q$, $y - z \in Q$
  und folglich auch $x - z = (x - y) + (y - z) \in Q$
  d.h. $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$
- Symmetrie : $\forall x, y \in R$ mit $x \sim y$ (d.h. $x - y \in Q$) ist auch $y - x = -(x - y) \in Q$
  d.h. $x \sim y \Rightarrow y \sim x$

Die gegebene Relation ist somit eine Äquivalenzrelation.

12.2 b)

Für ein $x \in R$ gibt es wegen der Dichtheit von Q in R eine rationale Zahl q mit $q \in (-x, -x+1)$.

Setze $r := q + x$.

$\rightarrow r \in [0,1]$ und $r \sim x$

Da die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist, gibt es also abzählbar unendliche viele Elemente q im obigen Intervall $(-x, -x+1)$ und somit auch abzählbar unendliche viele Elemente r .

Also , enthält jede Äquivalenzklasse abzählbar unendliche viele Elemente.

12.2 c)

Definition : $r + A := \{r + p : p \in A\}$ $r \in Q$

Zeigen : $(r + A) \cap (s + A) = \varnothing$ für $r, s \in Q$, $r \neq s$

Seien $r, s \in Q$.

Angenommen, es existiert ein $x \in (r + A) \cap (s + A)$.

Dann ist $x = r + p = s + q$ für bestimmte, feste $p, q \in A$.

Wegen $p - q = s - r \in Q$ ist $p \sim q$ und somit $p = q$, da A nach Voraussetzung genau ein Element aus jeder Äquivalenzklasse enthält.

Hieraus folgt nun $r + p = r + q = s + p = s + q$ und somit $r = s$.

Es wurde also gezeigt, $(r + A) \cap (s + A) \neq \varnothing \Rightarrow r = s$

Mittels der Kontraposition der Implikation $\left((A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)\right)$ folgt die Behauptung $r \neq s \Rightarrow (r + A) \cap (s + A) = \varnothing$.

12.2 d)
Zeigen, dass $[0,1] \quad \subseteq \quad \bigcup\{r+A : |r| \leq 1\,,\, r \in Q\} \quad \subseteq \quad [-1,2]$

Für $x \in [0,1]$ gibt es nach Definition von A ein $r \in A$ mit $x \sim r$.
Es ist also $q := x - r \in Q$.
Wegen $x \in [0,1]$ und $r \in A \subseteq [0,1]$ gilt : $q = x - r \in [-1,1]$.
D.h. $x = q + r \in q + A$ mit $q \in Q \cap [-1,1]$
Die erste Inklusion wurde somit gezeigt.

Sei nun $q \in Q \cap [-1,1]$.
Wegen $A \subseteq [0,1]$ gilt : $q + A \subseteq [-1,2]$
Die zweite Inklusion wurde somit auch gezeigt.

12.2 e)
???

12.3)
gegeben : $A \subseteq R^n$
zu beweisen : $l(A) = \inf\{\ l(G) : A \subset G\,,\, G\ \ offen\}$
Beweis :
Sei $e > 0$ vorgegeben.
Da das äußere Maß von A das Infimum über alle möglichen ist, existiert eine Menge von Intervallen $\bigcup_j I_j \supseteq A$, $\left(I_j \in F_n\right)$.

Nach Definition gilt somit $\sum_j |I_j| \leq l(A) + e$.

Dann existieren auch offene Intervalle $\tilde{I}_j$, so daß gilt :

$\tilde{I}_j \supseteq I_j \quad , \quad |\tilde{I}_j| \leq |I_j| + e_j \quad , \quad e_j > 0 \quad$ und $\quad \sum_j e_j = e$.

Setze nun $G := \bigcup_j \tilde{I}_j$.

G ist offen, da die Vereinigung offener Menge eine offene Menge ist und es gilt $G \supseteq A$.

$\Rightarrow l(A) \leq l(G) \leq \sum_j |\tilde{I}_j| \leq \sum_j |I_j| + e \leq l(A) + 2e$

$\Rightarrow l(A) = \inf\{\ l(G) : A \subset G\,,\, G\ \ offen\}$

Q.e.d.