



Bild- und Videokompression

1. Übungsblatt (Wahrscheinlichkeit, Entropie, Markov-Prozesse)

Aufgabe 1 (5 Punkte)

- i.) Seien A und B zwei Ereignisse aus dem Stichprobenraum Ω mit $A \cap B \neq \emptyset$.
 A und B sind also keine unabhängigen Ereignisse.

Zeigen Sie mit der Hilfe der Axiome aus der Vorlesung, dass gilt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

- ii.) Seien A , B und C Ereignisse aus Ω mit $A \cap B = A \cap C = \emptyset$ und $B \cap C \neq \emptyset$.

Zeigen Sie mit der Hilfe der Axiome aus der Vorlesung und dem Resultat aus Aufgabe (i), dass gilt:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C).$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

- i) Zeigen Sie, daß für zwei Teilmengen A und B aus einer σ -Algebra \mathcal{F} folgt, dass auch $B \setminus A$ zu \mathcal{F} gehört.
- ii) Benutzen Sie einfache Mengenoperationen um zu zeigen, dass σ -Algebren abgeschlossen sind unter abzählbaren Mengendurchschnitt, d.h. für

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \text{ folgt dass auch } \bigcap_i A_i \in \mathcal{F}.$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für einen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) unter der Annahme von unabhängigen Ereignissen $A_i \in \mathcal{F}$ gilt:

$$0 \leq H \leq \log_2 |\Omega|$$

wobei

$$H = - \sum_{i=1}^n P(A_i) \log_2 P(A_i)$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Betrachten wir die im Portal zu findenden Grauwertbilder im pgm-Format (mit 512 Zeilen und 512 Spalten).

Das Bildformat ist sehr einfach. Nach einem Header folgt jeweils ein Character für einen Pixel, wobei das Bild zeilenweise aufgebaut ist. Der Header lautet

```
P5\n
512 512\n
255\n
```

Wir wollen die Entropie dieses Bilder unter verschiedenen Annahmen berechnen.

Definieren Sie zu nächst den zugehörigen Wahrscheinlichkeitsraum unter der Annahme

1. der Unabhängigkeit der Pixel untereinander und
2. dass die Beziehungen zwischen den Pixeln vollständig durch einen Markov- Modell erster Ordnung beschrieben sind. Hierbei wird das Bild wieder zeilenweise hintereinander als eindimensionale Pixel-Folge angesehen.

Geben Sie die Entropie für den Fall der Unabhängigkeit der Pixel untereinander an!

Schreiben Sie dazu ein Programm, welches die Berechnung durchführt. Dieses ist im Quelltext einzusenden.

Wieviele Zustände hat ihr Markov-Modell ?

Geben Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten und Zustandswahrscheinlichkeiten des Markov-Modells für die Bilder an.

Wie groß ist die Entropie bei Verwendung des Markov-Modells erster Ordnung für die Bilder im Vergleich zur Entropie bei unterstellter Unabhängigkeit?

Bemerkung:

Die Übergangswahrscheinlichkeiten und Zustandswahrscheinlichkeiten des Markov-Modells sollten sinnvollerweise durch das Programm berechnet und ausgegeben werden.

Hinweise:

Zur elektronischen Einsendung und den Modalitäten verweisen wir auf das Portal zur Vorlesung: <http://studip.uni-halle.de>