Informatik 3 – Übung 12 – Georg Kuschk

12.1)
Ist der Masterschalter aktiviert (Signal 1), dann ist der Alarm für das Haus aktiviert.
Ist ein Etagenschalter deaktiviert (Signal 1), dann ist der Alarm für diese Etage deaktiviert.

Die Literale werden wiefolgt bezeichnet :

x_1 : Masterschalter
x_2 : Etagenschalter der 1. Etage
x_3 : Bewegungsmelder der 1. Etage
x_4 : Etagenschalter der 2. Etage
x_5 : Bewegungsmelder der 2. Etage
x_6 : Etagenschalter der 3. Etage
x_7 : Bewegungsmelder der 3. Etage

Die Funktion $f : B^7 \rightarrow B$ für den Alarmanlagen-Ausgang lautet somit in DNF :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = 1 \;\Leftrightarrow\; (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \in$$
$$\{ (1000001), (1000100), (1000101), (1000110), (1000111), (1001001), (1001101), (1010000),$$
$$(1010001), (1010010), (1010011), (1010100), (1010101), (1010110), (1010111), (1011000),$$
$$(1011001), (1011010), (1011011), (1011100), (1011101), (1011110), (1011111), (1100001),$$
$$(1100100), (1100101), (1100110), (1100111), (1101001), (1101101), (1111001), (1111101) \}$$

Mit Hilfe des Quine/McCluskey-Verfahrens die Primimplikanten berechnen :

$L_0^{\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}}$
1000001 1000100 <u>1010000</u> 1000101 1000110 1001001 1010001 1010010 1010100 1011000 1100001 <u>1100100</u> 1000111 1001101 1010011 1010101 1010110 1011001 1011010 1011100 1100101 1100110 <u>1101001</u> 1010111 1011011 1011101 1011110 1100111 1101101 <u>1111001</u> 1011111 1111101

Für L_1 ergeben sich folgende Implikanten :

$L_1^{\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}}$	$L_1^{\{x_1,x_2,x_4,x_5,x_6,x_7\}}$	$L_1^{\{x_1,x_2,x_3,x_5,x_6,x_7\}}$	$L_1^{\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_6,x_7\}}$	$L_1^{\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_7\}}$	$L_1^{\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}}$
1-00001	10-0001	100-001	1000-01	10001-0	100010-
1-00100	10-0100	101-000	1010-00	10100-0	101000-
1-00101	10-0101	100-101	1001-01	10001-1	100011-
1-00110	10-0110	101-001	1010-01	10100-1	101001-
1-01001	10-1001	101-010	1010-10	10101-0	101010-
1-00111	10-0111	101-100	1011-00	10110-0	101100-
1-01101	10-1101	110-001	1100-01	11001-0	110010-
1-11001	11-1001	101-011	1010-11	10101-1	101011-
1-11101	11-1101	101-101	1011-01	10110-1	101101-
		101-110	1011-10	10111-0	101110-
		110-101	1101-01	11001-1	110011-
		101-111	1011-11	10111-1	101111-
			1111-01		

Da alle Implikanten aus L_0 durch Implikanten aus L_1 überdeckt werden, gibt es in L_0 somit keine Primimplikanten.

$P_0 = \varnothing$

Für L_2 ergeben sich folgende Implikanten :

$\binom{6}{4} = 15$ Möglichkeiten eine 4-elementige Teilmenge aus einer 6-elementigen Menge auszuwählen :

(Da x_1 =Masterschalter immer auf 1 ist)

$L_2^{\{x_1,x_4,x_5,x_6,x_7\}}$	$L_2^{\{x_1,x_3,x_5,x_6,x_7\}}$	$L_2^{\{x_1,x_3,x_4,x_6,x_7\}}$	$L_2^{\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_7\}}$	$L_2^{\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_6\}}$	$L_2^{\{x_1,x_2,x_5,x_6,x_7\}}$	$L_2^{\{x_1,x_2,x_4,x_6,x_7\}}$	$L_2^{\{x_1,x_2,x_4,x_5,x_7\}}$
1--1001	1-0-001	1-00-01	1-001-0	1-0010-	10--001	10-0-01	10-01-0
1--1101	1-0-101	1-01-01	1-001-1	1-0011-	10--101	10-1-01	10-01-1
		1-11-01				11-1-01	

$L_2^{\{x_1,x_2,x_4,x_5,x_6\}}$	$L_2^{\{x_1,x_2,x_3,x_6,x_7\}}$	$L_2^{\{x_1,x_2,x_3,x_5,x_7\}}$	$L_2^{\{x_1,x_2,x_3,x_5,x_6\}}$	$L_2^{\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_7\}}$	$L_2^{\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_6\}}$	$L_2^{\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}}$
10-010-	100--01	101-0-0	101-00-	1010--0	1010-0-	10001--
10-011-	101--00	101-0-1	101-01-	1010--1	1010-1-	10100--
	101--01	101-1-0	101-10-	1011--0	1011-0-	10101--
	101--10	101-1-1	101-11-	1011--1	1011-1-	10110--
	110--01					11001--
	101--11					10111--

$\Rightarrow$ Alle Implikanten aus L_1 werden durch Implikanten aus L_2 überdeckt, d.h. auch in L_1 sind keine Primimplikanten vorhanden.

$P_1 = \varnothing$

Für L_3 ergeben sich folgende Implikanten :

$L_3^{\{x_1,x_4,x_6,x_7\}}$	$L_3^{\{x_1,x_3,x_6,x_7\}}$	$L_3^{\{x_1,x_3,x_4,x_5\}}$	$L_3^{\{x_1,x_2,x_6,x_7\}}$	$L_3^{\{x_1,x_2,x_4,x_5\}}$	$L_3^{\{x_1,x_2,x_3,x_7\}}$	$L_3^{\{x_1,x_2,x_3,x_6\}}$	$L_3^{\{x_1,x_2,x_3,x_5\}}$	$L_3^{\{x_1,x_2,x_3,x_4\}}$
1--1-01	1-0--01	1-001--	10---01	10-01--	101---0	101--0-	101-0--	1010---
					101---1	101--1-	101-1--	1011---

$\Rightarrow$ Alle Implikanten aus L_2 werden durch Implikanten aus L_3 überdeckt, d.h. auch in L_2 sind keine Primimplikanten vorhanden.

$P_2 = \varnothing$

In L_4 ist lediglich ein Implikant enthalten :

$L_4^{\{x_1,x_2,x_3\}}$
101----

Für die restlichen 2-elementigen Mengen gilt : $L_4^{U_i} = \varnothing$.

$\Rightarrow$ Folgende Implikanten aus L_3 werden nicht durch den Implikanten aus L_4 überdeckt :

{1--1-01 , 1-0--01 , 1-001-- , 10---01 , 10-01--}

$= \{x_1x_4x_6'x_7 \text{ , } x_1x_3'x_6'x_7 \text{ , } x_1x_3'x_4'x_5 \text{ , } x_1x_2'x_6'x_7 \text{ , } x_1x_2'x_4'x_5\} = P_3$

$\Rightarrow P_4 = \{101\text{----}\} = \{x_1x_2'x_3\}$

Die Menge P der berechneten Primimplikanten ist somit

$$\begin{aligned} P &= P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \\ &= \{x_1x_4x_6'x_7 \text{ , } x_1x_3'x_6'x_7 \text{ , } x_1x_3'x_4'x_5 \text{ , } x_1x_2'x_6'x_7 \text{ , } x_1x_2'x_4'x_5 \text{ , } x_1x_2'x_3\} \end{aligned}$$

Bestimmung der wesentlichen Primimplikanten mittels der Matrix-Überdeckung :
(aufgrund der Größe zweigeteilt)

	1000001	1000100	1010000	1000101	1000110	1001001	1010001	1010010	1010100	1011000	1100001	1100100	1000111	1001101	1010011	1010101
1.) 1--1-01						1								1		
2.) 1-0--01	1			1		1					1			1		
3.) 1-001--		1		1	1							1	1			
4.) 10---01	1			1		1	1							1		1
5.) 10-01--		1		1	1				1				1			1
6.) 101----			1				1	1	1	1					1	1

	1010110	1011001	1011010	1011100	1100101	1100110	1101001	1010111	1011011	1011101	1011110	1100111	1101101	1111001	1011111	1111101
1--1-01		1								1			1	1		1
1-0--01					1		1						1			
1-001--					1	1						1				
10---01		1								1						
10-01--	1							1								
101----	1	1	1	1				1	1	1	1				1	

Die rot eingefärbten Primimplikanten (1,2,3,6) sind wesentlich.

Der 4. Primimplikant wird vom 2. und 6. gemeinsam überdeckt.
Der 5. Primimplikant wird vom 3. und 6. gemeinsam überdeckt.

$\Rightarrow$ Die wesentlichen Primimplikanten

$\{x_1x_4x_6'x_7 \text{ , } x_1x_3'x_6'x_7 \text{ , } x_1x_3'x_4'x_5 \text{ , } x_1x_2'x_3\}$ reichen aus, um die Funktion f zu beschreiben.

Die Gesamtkosten sind hierbei minimal.

D.h., für das Minimalpolynom gilt :

$\Rightarrow f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7) = x_1x_4x_6'x_7 + x_1x_3'x_6'x_7 + x_1x_3'x_4'x_5 + x_1x_2'x_3$

12.2 a)

in KNF gegeben : $(x'+y'+z)\cdot(y'+z')\cdot(x+z')$

in DNF umformen :

$= (x'y'+x'z'+y'+y'z'+y'z+zz')\cdot(x+z')$

$= xx'y'+x'y'z'+xx'z'+x'z'+xy'+y'z'+xy'z'+y'z'+xy'z+y'zz'$

$= x'y'z'+x'z'+xy'+y'z'+\underline{xy'z'+xy'z}$ - $xy'z'+xy'z = xy' \rightarrow$

$= x'y'z'+x'z'+xy'+y'z'$ - zu vollständigen Monomen erweitern $\rightarrow$

$= x'y'z'+x'yz'+x'y'z'+xy'z+xy'z'+xy'z'+x'y'z'$

$= x'y'z'+x'yz'+xy'z+xy'z'$: DNF

12.2 b)

gegeben : $xyz+x'z'+xy'z'$

in DNF : $xyz+x'yz'+x'y'z'+xy'z'$

in KNF umformen :

$= (xyz+xy'z')+x'z'+\underline{(y'z')}$ - da $y'z'$ schon in $xy'z'$ und $x'z'$ enthalten ist

$= (xyz+xy'z'+xyy'+xzz') \quad + x'z'+ \quad (y'z'+yy'z'+yzz'+z'zz')$

$= (xy+xz')(y'+z) \quad + x'z'+ \quad (yz'+z'z')(y'+z)$

$= xx'+x(y+z')(y'+z) \quad + x'z'+ \quad z'(y+z')(y'+z)$

$= (x+z')(x'+(y+z')(y'+z))$

$= (x+z')\cdot(x'+y+z')\cdot(x'+y'+z)$: KNF

12.3)
Da diese Aufgabe quasi identisch mit Aufgabe 10.1 ist, kann ich nur eben diese wiederholen :

Wie in Aufgabe 10.1 a) bereits gezeigt wurde, ist die Menge der Primimplikanten von s_k^n :

$\{x_{i_1}...x_{i_k} \;:\; x_{i_j} \in \{x_1,...,x_n\} \quad , \quad x_{i_r} \neq x_{i_s} \Leftrightarrow r \neq s\}$

Hieraus folgt sofort, dass jedes Monom $x_{i_1}...x_{i_k}$ mit k verschiedenen, positiven Literalen in der Menge der Primimplikanten enthalten ist.

Desweiteren wurde in Aufgabe 10.1 c) gezeigt, dass das Minimalpolynom für diese Funktion eindeutig ist (da die Funktion monoton ist).
D.h., alle Primimplikanten sind wesentlich.