Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. M. Arnold, B. Burgermeister
Wintersemester 2005

Numerische Mathematik II

1. Gruppenübungsblatt, Bearbeitung am 12.10.2005

`http://sim.mathematik.uni-halle.de/~arnold/courses/SoS05.num/`

Aufgabe 1. *Eigenwerte, Eigenvektoren, ...*

Bestimmen Sie die Eigenwerte, Eigenvektoren und Determinante von

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = uv^T$ für $u, v \in \mathbb{R}^n$

c) $C = I - 2vv^T$ für $v \in \mathbb{R}^n,\ v^Tv = 1$

Aufgabe 2. *Transformation auf Hessenberg-Form*

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 10 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Householder-Spiegelung Q_1 so, dass $Q_1(6, -2, -2, 1)^T = (6, \star, 0, 0)^T$ gilt.

b) Berechnen Sie $A^{(2)} := Q_1 A Q_1^T$

c) Transformieren Sie $A^{(2)}$ wie in Schritt a) und b) auf die Form

$$A^{(3)} := Q_2 A^{(2)} Q_2^T = \begin{pmatrix} \star & \star & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & 0 \\ 0 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & \star \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 3. *Eigenwerte von Tridiagonalmatrizen*

a) Man zeige: λ ist Eigenwert von A genau dann, wenn λ auch Eigenwert von B ist, mit

$$A = \begin{pmatrix} \delta_1 & \gamma_2 & & 0 \\ \beta_2 & \delta_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma_n \\ 0 & & \beta_n & \delta_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \delta_1 & -\gamma_2 & & 0 \\ -\beta_2 & \delta_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\gamma_n \\ 0 & & -\beta_n & \delta_n \end{pmatrix}.$$

Tipp: A und B sind ähnlich, geben Sie eine geeignete Transformationsmatrix an.

b) Zeigen Sie für die reelle symmetrische Tridiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \delta_1 & \gamma_2 & & 0 \\ \gamma_2 & \delta_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma_n \\ 0 & & \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} \delta_i &= -\delta_{n+1-i}, & i &= 1, \dots, n, \\ \gamma_i &= \gamma_{n+2-i}, & i &= 2, \dots, n, \end{aligned}$$

dass mit jedem Eigenwert λ von A auch $-\lambda$ Eigenwert von A ist.

c) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_2 & & 0 \\ \gamma_2 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma_n \\ 0 & & \gamma_n & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i \in \mathbb{R}, \; i = 2, \dots, n$$

symmetrisch zu 0 liegen und dass

$$\det(A) = \begin{cases} (-1)^{n/2} \gamma_2^2 \gamma_4^2 \dots \gamma_n^2 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$