Numerik 2 – Übung04 – Georg Kuschk

1.a)

$U = (u_1 \ldots u_m)$, $u_i \in R^m$

$V = (v_1 \ldots v_n)$, $v_i \in R^n$ $U, V =$ orthogonale Matrizen

i)

$$\begin{aligned} U^T AV = \Sigma = diag(s_1, \ldots, s_p) &\Leftrightarrow UU^T AV = U\Sigma \\ &\Leftrightarrow AV = U\Sigma \\ &\Leftrightarrow A \cdot (v_1 \ldots v_n) = (u_1 \ldots u_m) \cdot \Sigma \\ &\Rightarrow A \cdot v_i = u_i \cdot s_i \\ &\Leftrightarrow A \cdot v_i = s_i \cdot u_i \qquad \text{für } i = 1, \ldots, p \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} U^T AV = \Sigma &\Leftrightarrow (U^T AV)^T = \Sigma^T \\ &\Leftrightarrow (AV)^T U = \Sigma^T = \Sigma \\ &\Leftrightarrow V^T A^T U = \Sigma \\ &\Leftrightarrow VV^T A^T U = V\Sigma \\ &\Leftrightarrow A^T U = V\Sigma \\ &\Leftrightarrow A^T \cdot (u_1 \ldots u_m) = (v_1 \ldots v_n) \cdot \Sigma \\ &\Rightarrow A^T \cdot u_i = v_i \cdot s_i \\ &\Leftrightarrow A^T \cdot u_i = s_i \cdot v_i \qquad \text{für } i = 1, \ldots, p \end{aligned}$$

1.b)

i)

$U^T AV = \Sigma \Leftrightarrow A = U\Sigma V^T$

$\det A = \det(U\Sigma V^T) = \det U \cdot \det \Sigma \cdot \det V^T$

Wegen $U \cdot U^T = I$ ist $\det U \cdot \det U^T = 1$ und wegen $\det U = \det U^T$ ist $\det U = 1$.
Analog folgt $\det V^T = 1$.

$\Rightarrow$

$$\det A = \det \Sigma = \underbrace{s_1 \cdot \ldots \cdot s_r}_{>0} \cdot \underbrace{s_{r+1} \cdot \ldots \cdot s_p}_{=0}$$

D.h. die Determinante ist von Null verschieden , wenn $rang(A) < r + 1$.
Und wegen $s_1 \cdot \ldots \cdot s_r > 0$ folgt $\det A \geq r$.

$\Rightarrow rang(A) = r$

ii)
???

iii)
???

1.c)

$$\|A\|_2 = \max_{i=1,\dots,p} s_i \qquad , \qquad k_2(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Kann nicht verwendet werden , da A nicht zwingend quadratisch.

$$k_2(A) = \frac{\max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|}{\min\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|} = \frac{\sqrt{l_{\max}(A^T A)}}{\sqrt{l_{\min}(A^T A)}} = \frac{s_1}{s_p}$$

1.d)

$$A^T A v_i = l_i v_i \iff A^T s_i u_i = l_i v_i \qquad \text{(siehe 1.a)}$$
$$\iff s_i A^T u_i = l_i v_i$$
$$\iff s_i \cdot s_i \cdot v_i = l_i v_i \qquad \text{(wieder 1.a)}$$
$$\iff s_i^2 \text{ sind Eigenwerte zu den Eigenvektoren } v_i \qquad ,(i=1,\dots,p)$$

$$A A^T u_i = l_i u_i \iff A s_i v_i = l_i u_i \qquad \text{(siehe 1.a)}$$
$$\iff s_i A v_i = l_i u_i$$
$$\iff s_i \cdot s_i \cdot u_i = l_i u_i \qquad \text{(wieder 1.a)}$$
$$\iff s_i^2 \text{ sind Eigenwerte zu den Eigenvektoren } u_i \qquad ,(i=1,\dots,p)$$

2.b)

gegeben :

Stützpunkte : $(t_i\ ,\ f_i) = (-1,-1)\,,\,(0,3)\,,\,(2,11)\,,\,(3,27) \qquad ,(i=0,1,2,3)$

$t=1$

	$k=0$	$k=1$
$t_0=-1$	$P_0(t)=f_0=-1$	$P_{01}(1)=\frac{(1+1)\cdot 3-(1-0)\cdot(-1)}{0+1}=7$
$t_1=0$	$P_1(t)=f_1=3$	$P_{12}(1)=\frac{(1-0)\cdot 11-(1-2)\cdot 3}{2-0}=7$
$t_2=2$	$P_2(t)=f_2=11$	
$t_3=3$	$P_3(t)=f_3=27$	$P_{23}(1)=\frac{(1-2)\cdot 27-(1-3)\cdot 11}{3-2}=5$

$k=2$	$k=3$
$P_{012}(1)=\frac{(1+1)\cdot 7-(1-2)\cdot 7}{2+1}=7$ $P_{123}(1)=\frac{(1-0)\cdot 5-(1-3)\cdot 7}{3-0}=\frac{19}{3}$	$P_{0123}(1)=\frac{(1+1)\cdot\frac{19}{3}-(1-3)\cdot 7}{3+1}=\frac{20}{3}$

3.)

Auf einem Intervall $[t_i\ ,\ t_{i+1}]$ sei $j\,(t)$ definiert durch $j\,(t) = a_i t^3 + b_i t^2 + c_i t + d_i$.
Forderungen :

$$j\,(t_i) = f\,(t_i) = a_i t_i^{\ 3} + b_i t_i^{\ 2} + c_i t_i + d_i$$
$$j\,'(t_i) = f\,'(t_i) = 3a_i t_i^{\ 2} + 2b_i t_i + c_i$$
$$j\,(t_{i+1}) = f\,(t_{i+1}) = a_i t_{i+1}^{\ 3} + b_i t_{i+1}^{\ 2} + c_i t_{i+1} + d_i$$
$$j\,'(t_{i+1}) = f\,'(t_{i+1}) = 3a_i t_{i+1}^{\ 2} + 2b_i t_{i+1} + c_i$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} t_i^3 & t_i^2 & t_i & 1 \\ 3t_i^2 & 2t_i & 1 & 0 \\ t_{i+1}^3 & t_{i+1}^2 & t_{i+1} & 1 \\ 3t_{i+1}^2 & 2t_{i+1} & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \\ d_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\,(t_i) \\ f\,'(t_i) \\ f\,(t_{i+1}) \\ f\,'(t_{i+1}) \end{pmatrix}$$

ist zu lösen für die zwei Intervalle $[t_0, t_1] = [0,1]$ und $[t_1, t_2] = [1,2]$

mit $f\,(t_0) = 0\ ,\ f\,'(t_0) = 1$, $f\,(t_1) = 0\ ,\ f\,'(t_1) = -\dfrac{1}{2}$, $f\,(t_2) = 0\ ,\ f\,'(t_2) = 0$

$\underline{[t_0, t_1] = [0,1]}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow d_0 = 0$, $c_0 = 1$

I : $a_0 + b_0 = -1$ d.h. $a_0 = -1 - b_0$

II : $3a_0 + 2b_0 = -\dfrac{3}{2}$

I in II : $-3 - b_0 = -\dfrac{3}{2}$ $\Rightarrow b_0 = -\dfrac{3}{2}$ $\Rightarrow a_0 = \dfrac{1}{2}$

D.h. $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

zu 3.)

$\underline{[t_1, t_2] = [1,2]}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 12 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1	1	1	1	0
3	2	1	0	-1/2
8	4	2	1	0
12	4	1	0	0
1	1	1	1	0
0	-1	-2	-3	-1/2
0	-4	-6	-7	0
0	-8	-11	-12	0
1	1	1	1	0
0	1	2	3	1/2
0	0	2	5	2
0	0	5	12	4
1	1	1	1	0
0	1	2	3	1/2
0	0	1	5/2	1
0	0	0	-1/2	-1

$\Rightarrow$

$d_1 = 2$

$c_1 = 1 - 5 = -4$

$b_1 = 1/2 + 8 - 6 = 5/2$

$a_1 = -5/2 + 4 - 2 = -1/2$

D.h. $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 5/2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$

Im Intervall $[0,1]$ ist $j(t) = \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + t$

Im Intervall $[1,2]$ ist $j(t) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{5}{2}t^2 - 4t + 2$

zu 3.)

Funktion :