Numerik 2 – Übung07 – Georg Kuschk

1.a)

$$s(t) = \begin{cases} s_1(t) = a_1 t^2 + b_1 t + c_1 & \text{für } 0 \le t \le 1 \\ s_2(t) = a_2 t^2 + b_2 t + c_2 & \text{für } 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

I. $f(0) = 0 = s_1(0) = \underline{c_1 = 0}$

II. $f(1) = 1 = s_1(1) = a_1 + b_1 + c_1 = \underline{a_1 + b_1 = 1}$

III. $f(1) = 1 = s_2(1) = \underline{a_2 + b_2 + c_2 = 1}$

IV. $f(2) = 0 = s_2(2) = \underline{4a_2 + 2b_2 + c_2 = 0}$

V. $s_1(1) = 2a_1 + b_1 = 2a_2 + b_2 = s_2'(1)$

$\Rightarrow$ (mit II. und III.) : $a_1 = 1 - b_1$ und $a_2 = 1 - b_2 - c_2$

$\Rightarrow$ $\underline{b_1 = b_2 + 2c_2}$

Aus III. bis V. (3 Gleichungen für 4 Unbekannte) folgt :

$$a_2 = b_1 - 3$$
$$b_2 = 8 - 3b_1$$
$$c_2 = 2b_1 - 4$$

Es wird also noch eine zusätzliche Randbedingung benötigt.

1.b.i)

$$s_1'(0) = 0 = b_1$$
$$\Rightarrow$$
$$a_1 = 1 - b_1 = 1$$
$$a_2 = b_1 - 3 = -3$$
$$b_2 = 8 - 3b_1 = 8$$
$$c_2 = 2b_1 - 4 = -4$$

$$\Rightarrow$$

$$s(t) = \begin{cases} t^2 & \text{für } t \in [0,1] \\ -3t^2 + 8t - 4 & \text{für } t \in [1,2] \end{cases}$$

1.b.ii)

$$s_1'(0) = 2 = b_1$$
$$\Rightarrow$$
$$a_1 = 1 - b_1 = -1$$
$$a_2 = b_1 - 3 = -1$$
$$b_2 = 8 - 3b_1 = 2$$
$$c_2 = 2b_1 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$s(t) = \begin{Bmatrix} -t^2 + 2\text{t} \\ -t^2 + 2\text{t} \end{Bmatrix} = -t^2 + 2\text{t} \qquad ,\text{t} \in [0,2]$$

1.b.iii)

$s_1'(0) = s_2'(2)$

$\Rightarrow$

$b_1 = 4a_2 + b_2 = 4b_1 - 12 + 8 - 3b_1 = b_1 - 4$

$\Rightarrow\ 0 = -4$

$\Rightarrow$ Berechnung nicht möglich.

2.a)

Setzt man $a_0 = 1$, so ist $\Phi(0) \neq 0$.

(Die Null kann nicht mehr erreicht werden.)

2.b)

Aufstellen eines Gleichungssystems kann zu unendlich vielen Lösungen führen.

$$\Phi^{2,1} = \frac{a_0 + a_1 t + a_2 t^2}{b_0 + b_1 t}$$

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 = a_2 (t-0)(t-p)$$

$$u(t) = b_0 + b_1(t)$$

$$u\left(\frac{1}{4}p\right) = -u\left(\frac{3}{4}p\right)$$

$$\Rightarrow u(t) = b_1\left(t - \frac{p}{2}\right)$$

Sei $b_1 = 1 \quad \Rightarrow \Phi\left(\frac{1}{4}p\right) = \frac{a_2 \cdot \frac{p}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}p\right)}{\frac{p}{4} - \frac{2}{4}p} = \frac{3}{4}p$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{4}{3}p$$

$$\Rightarrow \Phi(t) = \frac{4}{3}p \cdot \frac{(t-0)(t-p)}{t - \frac{p}{2}}$$

2.c)

$$\Phi^{2,1} = \frac{a_0 + a_1 t}{b_0 + b_1 t + b_2 t^2}$$

I.	$t = -2:$	$a_0 - 2a_1 = -(b_0 - 2b_1 + 4b_2)$
II.	$t = -1:$	$a_0 - a_1 = -(b_0 - b_1 + b_2)$
III.	$t = 1:$	$a_0 + a_1 = b_0 + b_1 + b_2$
IV.	$t = 2:$	$a_0 + 2a_1 = b_0 + 2b_1 + 4b_2$

$\Rightarrow$

$b_1 = 0$

$a_0 = 0$

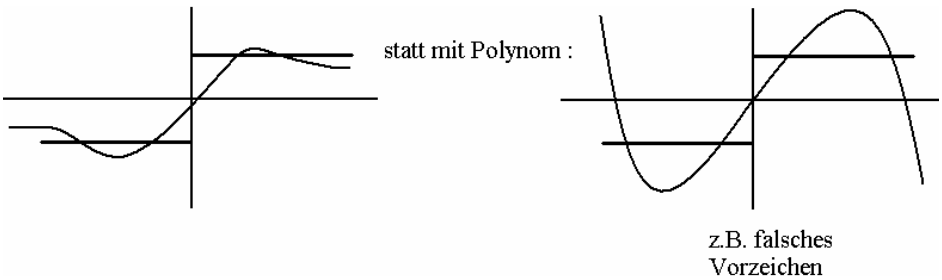
$b_0 = 2b_2$

$a_1 = b_0 + b_2 = 3b_2$

Wähle $b_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad b_0 = 2 \quad , \quad a_1 = 3$

$$\Rightarrow \Phi(t) = \frac{3t}{2+t^2}$$

2.d)



3.a)

$$s_\Delta(t) = \sum_{i=-k+1}^{l} a_i B_{i,k}(t)$$

j	-2	-1	0	1	2	3
	0	1	2	4	5	6

$t = \frac{1}{2}$ $\quad r = 1 \quad r = 2 \quad r = 3$

i=-2	0	1	$\frac{\frac{1}{2}-0}{1-0}\cdot 1 + \frac{1-\frac{1}{2}}{2-1}\cdot 0 = \frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{2}-0}{2-0}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4-\frac{1}{2}}{4-1}\cdot 0 = \frac{1}{8}$
i=-1	1	0	0	
i=0	2	0	0	
i=1	4	0	0	

3.b)

???