Numerik 2 – Übung10 – Georg Kuschk

1.)

$$t_m = \frac{1}{t_U - t_A} \cdot \int_{t_A}^{t_U} t(t)dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t(12+8x)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \tilde{t}(x)dx$$
$$= w_1 \cdot \tilde{t}(x_1) + w_2 \cdot \tilde{t}(x_2)$$

für Polynome von möglichst hohem Grad

I- 1: $\quad \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1dx = 1 = w_1 + w_2$

II- x: $\quad \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} xdx = 0 = w_1x_1 + w_2x_2$ (=0 , da ungerade Funktion)

III- x^2: $\quad \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{1}{3} = w_1x_1^2 + w_2x_2^2$

IV- x^3: $\quad \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^3dx = 0 = w_1x_1^3 + w_2x_2^3$

IV- x_2^2 II: $\quad 0 = w_1x_1(x_1^2 - x_2^2)$

3 Möglichkeiten :

$w_1 = 0$, nein - Gewicht

$x_1 = 0$, nein – da sonst auch $x_2 = 0$

$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2$

$\Rightarrow x_1 = -x_2$ (wollen keine Doppelnullstelle , desweiteren sortiert - $x_1 < x_2$)

in II : $\quad 0 = (w_1 - w_2)x_1$

$\Rightarrow w_1 = w_2$

in I : $\quad \Rightarrow w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$

in III : $\quad \frac{1}{3} = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 = x_1^2$

$\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \quad x_2 = +\frac{1}{\sqrt{3}}$

Rücktransformation auf [4,20] :

$$t_m = \frac{1}{2}\left(t\left(12 - \frac{8\sqrt{3}}{3}\right) + t\left(12 + \frac{8\sqrt{3}}{3}\right)\right)$$

$\Rightarrow$

$t_1 \approx 7.38 \quad \approx 07:22$

$t_2 \quad \approx 16:37$

2.a)

$$I_0 = \int_0^{2p} 1 \cdot \sin(a \cdot t)dt$$

$$= \left[-\frac{1}{a}\cos(a \cdot t) \right]_0^{2p} = 0$$

$$I_1 = \int_0^{2p} t \cdot \sin(a \cdot t)dt$$

$$= \left[-\frac{t}{a}\cos(a \cdot t) \right]_0^{2p} + \int_0^{2p} \frac{1}{a}\cos(a \cdot t)dt$$

$$= -\frac{2p}{a} + 0 = -\frac{2p}{a}$$

$$I_2 = \int_0^{2p} t^2 \cdot \sin(a \cdot t)dt = -\frac{4p^2}{a} \qquad (a = \text{ganzzahlig})$$

2.b)

$$p = 1: \qquad I_0 = 0 = w_0 + w_1 + w_2$$

$$p = t: \qquad I_1 = -\frac{2p}{a} = w_1 p + 2w_2 p$$

$$p = t^2: \qquad I_2 = -\frac{4p^2}{a} = w_1 p^2 + 4w_2 p^2$$

$\Rightarrow$

$$w_1 = 0 \quad , \quad w_2 = -\frac{1}{a} \quad , \quad w_0 = \frac{1}{a}$$

$$I(p, a) = \frac{1}{a}p(0) - \frac{1}{a}p(2p)$$

2.c)

$$a = 10 \quad , \quad f(t) = \sin\left(\frac{t}{4}\right)$$

$$I(f, 10) = \frac{1}{10}\sin(0) - \frac{1}{10}\sin\left(\frac{p}{2}\right) = -\frac{1}{10}$$

Fehler $\left| -\frac{1}{10} + \frac{160}{1599} \right| = \frac{1}{15990} \approx 6.3 \cdot 10^{-5}$

3.)

$$\int_0^{2h} \frac{1}{\sqrt{t}} j\,(t)dt \approx \int_0^{2h} \frac{1}{\sqrt{t}}\, p(t)dt \qquad \text{mit} \quad p(t_i) = j\,(t_i)$$

$$\int_0^{2h} \frac{1}{\sqrt{t}}\, p(t)dt = w_0 \cdot p(0) + w_1 \cdot p(h) + w_2 \cdot p(2h)$$

Aufteilung in Funkt ion welche die Singularität verursacht und in eine möglichst glatte Funktion.

I $\quad \int_0^{2h} \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot 1\, dt = \left[2t^{\frac{1}{2}} \right]_0^{2h} = 2\sqrt{2h} = w_0 + w_1 + w_2$

II $\quad \int_0^{2h} \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot t\; dt = \frac{2}{3} \cdot 2h\sqrt{2h} = h \cdot w_1 + 2h \cdot w_2$

III $\quad \int_0^{2h} \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot t^2 dt = \frac{2}{5}(2h)^2\sqrt{2h} = h^2 w_1 + 4h^2 w_2$

III- h II : $\frac{2}{5}(2h)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}(2h)^{\frac{5}{2}} = 4h^2 w_2 - 2h^2 w_2$

$$\Rightarrow 2h^2 w_2 = \frac{2}{15} 2h^2 \sqrt{2h}$$

$$\Rightarrow w_2 = \frac{2}{15}\sqrt{2h}$$

$$\Rightarrow w_1 = \frac{16}{15}\sqrt{2h} \quad , \quad w_0 = \frac{12}{15}\sqrt{2h}$$

$$\Rightarrow Q(j\,) = \frac{2}{15}\sqrt{2h}\left(6j\,(0) + 8j\,(h) + j\,(2h)\right)$$

2.Teil :

$$I(f) = \frac{2}{15}\sqrt{2h}\left(6j\,(0) + 8j\,(h) + j\,(2h)\right) + \frac{1-2h}{6}\left(f(2h) + 4f\left(\frac{2h+1}{2}\right) + f(1) \right)$$

$h = 0.1$: $\quad I(f) \approx 3.4281$

$h = 0.05$: $\quad I(f) \approx 3.4896$

Feinere Rasterung bringt bei singulären Funktionen und der Simpsonregel auch nichts mehr.

Matlab-Befehle : quad – Simpsonregel
quadl – Gauß-Lobatto