Übung Lineare Optimierung SS 2006 Blatt 3

1. Eine Gruppe von Studenten soll 10 Biersorten testen. Dazu werden die Studenten in einem Verkostungsraum versammelt und gemeinsam befragt, ob für sie Sorte i besser als Sorte j ist (für $i, j = 1, ..., 10, \quad i \neq j$). Eine Zustimmung wird von den Studenten jeweils durch Handzeichen signalisiert. Aus diesen Daten soll ein Ranking der 10 Biersorten erstellt werden, welches den Geschmack der Studenten möglichst gut representiert. Formulieren Sie das Problem als lineares Optimierungsproblem!

2. Es sei A eine (n, m)-Matrix.

   (a) Zeigen Sie, dass die Mengen

   $$K := \{x \in \mathbb{R}^n : x = Au, \ u \geq 0\} \quad \text{und} \quad K^* := \{y \in \mathbb{R}^n | \ \forall x \in K : x^T y \geq 0 \ \}$$

   konvexe Kegel sind!

   (b) Zeigen Sie, die Menge K^* polyedrisch ist!

   Hinweis: Eine Teilmenge K eines linearen Raumes heißt Kegel, wenn gilt:

   $$[k \in K, \lambda \geq 0] \Rightarrow \lambda k \in K.$$

   Bemerkung: K^* heißt Dualkegel zu K.

3. Die konvexe polyedrische Menge B sei durch die folgenden Ungleichungen gegeben:

   $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 10 \\ x_1 - x_2 &\leq 0 \\ x_1 - x_3 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 - x_4 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

   Welcher der Punkte $x^1 = (2, 2, 2, 0)^T$, $x^2 = (3, 3, 1, 3)^T$ und $x^3 = (0, 0, 6, 4)^T$ ist eine Ecke von B?

   Besitzt B entartete Ecken? Wenn ja, dann geben Sie eine entartete Ecke an!

4. Eine konvexe polyedrische Menge sei durch die folgenden Ungleichungen gegeben:

   $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leq 13 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 15 \\ -x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

   Bestimmen Sie eine Ausgangsecke und sämtliche Nachbarecken rechnerisch durch den in der Vorlesung beschriebenen Eckenübergang!