Lineare Optimierung - Übung04 - Georg Kuschk

Aufgabe 4.1 :

Variablen :

x_1	= Wein – Anteil	(50 Cent je Liter)
x_2	= Frostschutzmittel (Glykol) – Anteil	(60 Cent je Liter)
x_3	= Natriumacid – Anteil	(90 Cent je Liter)

Zielfunktion $Q : 50x_1 + 60x_2 + 90x_3 \rightarrow \min$

Restriktionen : (Reihenfolge wie sie im Text vorkommen)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \;,\; x_1, x_2, x_3 \geq 0 \;,\; x_2 \geq \frac{1}{3} \;,\; x_1 \geq \frac{x_2}{2} \;,\; x_3 \geq \frac{x_2}{2} \;,\; x_3 \leq x_2 \;,\; x_3 \geq \frac{x_1}{2}$$

D.h. :

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\
3x_2 &\geq 1 \\
2x_1 - x_2 &\geq 0 \\
2x_3 - x_2 &\geq 0 \\
x_2 - x_3 &\geq 0 \\
2x_3 - x_1 &\geq 0 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0 \\
x_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

Lösung mit Mathematica :

In[1]:= $\texttt{LinearProgramming}\left[\{50, 60, 90\}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \{1, 1, 0, 0, 0, 0\}\right]$

Out[1]= $\left\{\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right\}$

Kosten : $\frac{2}{5} \cdot 50 + \frac{2}{5} \cdot 60 + \frac{1}{5} \cdot 90 = \frac{100 + 120 + 90}{5} = \frac{310}{5} = 62$ Cent

In Worten :

	Wein-Anteil	40%
	Glykol-Anteil	40%
	Natriumacid-Anteil	20%

Billig und haut rein. Wohl bekomm's.
(Jedoch ein Problem besteht : Wer verkauft mir solche kleinen Mengen ?)

Aufgabe 4.2)

Beweis :

Sei $f : R^n$

Lineare Funktionen sind Spezialfälle der konvexen Funktionen.
Für konvexe Funktionen gilt : Jedes lokale Minimum ist auch globales Minimum.

Wenn die Nebenbedingungen nur aus Gleichungen bestehen, so muss die Lösung **auf** den zugehörigen Hyperebenen liegen. (Und nicht wie allgemein in einem der zwei Halbräume.)

Der zulässige Bereich besteht dann aus den Schnittpunkten von n linear unabhängigen Hyperebenen.
Existieren solche Schnittpunkte nicht, so existiert keine Lösung.
Existieren mehrere solcher Schnittpunkte, so entspricht jeder einem lokalen Minimum und somit auch einem globalen Minimum. (D.h. jeder Punkt des zulässigen Bereichs ist optimal.)

q.e.d.

Aufgabe 4.3.a)

$M := \{x \in R^n : Ax \leq b\} \neq \emptyset$ mit $A \in R^{(m \times n)}$ und $b \in R^m$

Zeigen, dass M nicht notwendigerweise Ecken besitzt.

Beweis :

Anhand eines Beispiels , welches nicht notwendigerweise Ecken besitzt :

Sei $A \in R^{(2 \times 2)}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und desweiteren sei $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die zugehörigen zwei Hyperebenen sind linear abhängig (parallel).

$\Rightarrow$ Es existiert kein $x \in M$, welches Schnittpunkt zweier linear unabhängigen Hyperebenen ist.
(Und dies ist ja die notwendige Bedingung für eine Ecke.)

$\Rightarrow$ M muss nicht notwendigerweise Ecken besitzen.

Bemerkung :

Für $m < n$ besitzt obiges M überhaupt keine Ecken, da es in dem Fall nur m begrenzenden Hyperebenen im R^n gibt. (zu wenig also)

Aufgabe 4.3.b)

$M := \{x \in R^n : Ax \leq b \ , \ x \geq 0\} \neq \emptyset$ mit $A \in R^{(m \times n)}$ und $b \in R^m$

Zeigen, dass M Ecken besitzt.

Beweis :

Im Vergleich zu a) sind zusätzliche n Vorzeichenrestriktionen $x_i \geq 0$ hinzugekommen.

Sind diese n Restriktionen mit "=" erfüllt, so bilden sie n linear unabhängige Hyperebenen, welche sich im Nullpunkt $(0,0,...,0)^T$ schneiden

Hier wurden jetzt allerdings die übrigen m Restriktionen vernachlässigt.
Gibt es unter diesen Restriktionen Hyperebenen, welche bzgl. der obigen n Hyperebenen linear unabhängig sind und den Nullpunkt „abschneiden" , so ist dies nicht weiter tragisch, da sie aufgrund der linearen Unabhängigkeit wenigstens eine x_i-Achse schneiden und somit wiederum Ecken bilden.

$\Rightarrow$ M besitzt immer Ecken

Aufgabe 4.4.a) :

Sei I ein Intervall auf R^n und $f, g : R^n \rightarrow R^m$ zwei konvexe Funktionen.
Dann gilt für alle $x^1, x^2 \in R^n$ und alle $l \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
&(f+g)\left(lx^1 + (1-l)x^2\right) \\
&= f\left(lx^1 + (1-l)x^2\right) \quad + g\left(lx^1 + (1-l)x^2\right) \\
&\leq lf(x^1) + (1-l)f(x^2) \quad + lg(x^1) + (1-l)g(x^2) \\
&= l\left(f(x^1) + g(x^1)\right) + (1-l)\left(f(x^2) + g(x^2)\right) \\
&= l \cdot (f+g)(x^1) + (1-l) \cdot (f+g)(x^2)
\end{aligned}$$

Die Summe zweier konvexer Funktionen ist also wiederum konvex.

Aufgabe 4.4.b) :

Die Behauptung ist falsch.

Gegenbeispiel : $f, g : R \rightarrow R$

$f(x) = -x$, $g(x) = x$

f, g sind konvex , $(f \cdot g)(x) = -x^2$ jedoch nicht.

Aufgabe 4.4.c) :

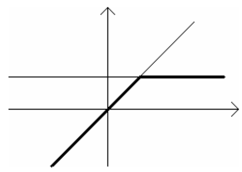
Ich gehe mal vom punktweisen Minimum aus, da die zwei folgenden Behauptungen ansonsten trivialsterweise richtig sind.

Die Behauptung ist falsch.

Gegenbeispiel : $f, g : R \rightarrow R$

$f(x) = 1$, $g(x) = x$

f, g sind konvex , das punktweise Minimum jedoch nicht :



Aufgabe 4.4.d) :

Das punktweise Maximum zweier konvexer Funktionen ist wiederum konvex.

Beweis :

TODO – Beim Traversieren der Maximum-Funktion treten beim „Funktionswechsel“ nur Left-Turns auf ...