Lineare Optimierung - Übung05 - Georg Kuschk , Guido Thurmann

Aufgabe 5.1 :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 7x_4 &= 11 \\ x_1 + 5x_3 + 4x_4 &= 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

x_1, x_2 sind Basisvariablen $\Rightarrow$ x_3, x_4 sind NichtBasisvariablen

D.h. $x_3 = x_4 = 0$

Einsetzen liefert :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 11 \\ x_1 &= 5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1 = 5 \quad , \quad x_2 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{Ausgangsecke } x^0 = \left(5 , \frac{1}{3} , 0 , 0 \right)$$

<u>kanonische Form herstellen (d.h. Auflösung nach den Basisvariablen) :</u>

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 7x_4 &= 11 \\ x_1 + 5x_3 + 4x_4 &= 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -2 & -7 & 11 \\ 1 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & -7 & 11 \\ \hline 1 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & -12 & -15 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & 1/3 \end{array}$$

D.h., kanonische Form :

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_3 + 4x_4 &= 5 \\ x_2 - 4x_3 - 5x_4 &= \frac{1}{3} \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.2 :

Zunächst Schlupfvariablen einführen :

$$y_1 + \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1$$
$$y_2 + x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1$$
$$y_3 + x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4$$
$$x_i \geq 0 \quad , \quad y_j \geq 0 \qquad (i = 1,2,3,4 \quad , \quad j = 1,2,3)$$

Zielfunktion : $2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 \rightarrow \min$

Anfangstableau :

BV \ NBV	x_1	x_2	x_3	x_4	rechte Seite	(*)
y_1	$\frac{1}{2}$	2 (Pivot)	1	-1	1	$\frac{1}{2}$ $\left(= \frac{b_1}{a_{1,a}}\right)$ (nur für positive Pivotspalten-Elemente)
y_2	1	$\frac{1}{2}$	2	-2	1	2 $\left(= \frac{b_2}{a_{2,a}}\right)$
y_3	1	-1	1	-1	4	
c (Koeffizienten der Minimierungsfunktion)	2	-3	-2	5	0	

Ausgangsecke : $(x, y) = (0,0,0,0,1,1,4)$

Pivotspalte = x_2-Spalte , da $c_2 < 0$
Pivotzeile = y_1-Zeile , da dort kleinster Quotient in (*)

- Pivotelement $a_{b,a} = 2$ wird zu $\frac{1}{a_{b,a}} = \frac{1}{2}$
- Die restlichen Elemente der alten Pivotspalte mit $-\frac{1}{a_{b,a}} = -\frac{1}{2}$ multiplizieren
- Die restlichen Elemente der alten Pivotzeile $\frac{1}{a_{b,a}} = \frac{1}{2}$ multiplizieren
- Die restlichen Zellen einer Spalte i : +($a_{b,i}$ · neuer Pivotspalten-Eintrag) (mit $a_{b,i}$ = Pivotzeilen-Element der Spalte i)

BV \ NBV	x_1	y_1	x_3	x_4	rechte Seite	(*)
x_2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
y_2	$\frac{7}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$ (Pivot)	$-\frac{7}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{7}$
y_3	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$	3
	$\frac{11}{4}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$	

nach Eckenübergang erhaltene Ecke : $(x, y) = \left(0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{3}{4}, \frac{9}{2}\right)$

Pivotspalte = x_3-Spalte , da $c_3 < 0$
Pivotzeile = y_2-Zeile , da dort kleinster Quotient in (*)

BV \ NBV	x_1	y_1	y_2	x_4	rechte Seite	(*)
x_2	0	$\frac{4}{7}$	$-\frac{2}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	
x_3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	-1	$\frac{3}{7}$	
y_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{7}$	$-\frac{6}{7}$	0	$\frac{27}{7}$	
	3	$\frac{10}{7}$	$\frac{2}{7}$	3	$\frac{12}{7}$	

= Minimalstelle, da die Zielfunktion in der kanonischen Form nur nichtnegative Koeffizienten $c_{m+1}, \ldots, c_n$ besitzt

Optimaler Punkt : $(x, y) = \left(0, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, 0, 0, 0, \frac{27}{7}\right)$ mit Zielfunktionswert $-\frac{12}{7}$

D.h. $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = \left(0, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, 0\right)^T$ ist Lösung des Optimierungsproblems.

Überprüfung mit Mathematica bestätigt dies :

In[1]:= $\texttt{LinearProgramming}\left[\{2, -3, -2, 5\}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 & -1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \{-1, -1, -4\}\right]$

Out[1]= $\left\{0, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, 0\right\}$

Aufgabe 5.3 :

Zunächst Schlupfvariablen einführen :

$$y_1 + x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 10$$
$$y_2 + x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 2$$
$$x_i \geq 0 \quad , \quad y_j \geq 0 \qquad (i = 1,2,3,4 \quad , \quad j = 1,2)$$

Zielfunktion : $-2x_2 + x_3 + l x_4 \to \min$

Anfangstableau :

BV \ NBV	x_1	x_2	x_3	x_4	rechte Seite	(*)
y_1	1	-2	3	2	10	
y_2	1	2 (Pivot)	-1	-1	2	1
c	0	-2	1	l	0	

BV \ NBV	x_1	y_2	x_3	x_4	rechte Seite	(*)
y_1	2	1	2	1 (Pivot)	12	12
x_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	
c	1	1	0	$l-1$	2	

$\Rightarrow$ Für $l \geq 1$ liegen alle Lösungen im Punkt $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,1,0,0)$ mit $Q_{\min} = -2$.

Für $l < 1$ ein weiterer Eckenübergang :

BV \ NBV	x_1	y_2	x_3	y_1	rechte Seite	(*)
x_4	2	1	2	1	12	
x_2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	7	
c	$-2l+3$	$-l+2$	$-2l+2$	$-l+1$	$-12l+14$	

Die Koeffizienten c_i sind nun für $l < 1$ allesamt ≥ 0.
D.h. für $l < 1$ liegen die Lösungen im Punkt $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,7,0,12)$
mit $Q_{\min} = 12l - 14$.

Aufgabe 5.4 :

Schlupfvariablen einführen und Zielfunktion als Minimierungsproblem :

$y_1 + x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \quad = 5$

$y_2 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \quad = 4$

$x_i \geq 0 \quad , \quad y_j \geq 0 \qquad (i = 1,2,3,4 \quad , \quad j = 1,2)$

Zielfunktion : $-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \to \min$

Anfangstableau :

BV \ NBV	x_1	x_2	x_3	x_4	rechte Seite	$(*x_1)$	$(*x_2)$	$(*x_3)$	$(*x_4)$
y_1	1	1	1	2	5	5	5	5	$\frac{5}{2}$
y_2	1	1	1	1	4	4	4	4	4
c	-1	-1	-1	-1	0				

- Sei die x_1-Spalte die Pivotspalte :

BV \ NBV	y_2	x_2	x_3	x_4	rechte Seite	(*)
y_1	-1	0	0	1	1	
x_1	1	1	1	1	4	
c	1	0	0	0	4	

$\Rightarrow$ Minimalstelle in $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (4{,}0{,}0{,}0)$ mit dem Zielfunktionswert $Q_{\min} = -4$, bzw. $Q_{\max} = 4$.

- Sei die x_2-Spalte die Pivotspalte :

BV \ NBV	x_1	y_2	x_3	x_4	rechte Seite	(*)
y_1	0	-1	0	1	1	
x_2	1	1	1	1	4	
c	0	1	0	0	4	

$\Rightarrow$ Minimalstelle in $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (0{,}4{,}0{,}0)$ mit dem Zielfunktionswert $Q_{\min} = -4$, bzw. $Q_{\max} = 4$.

- Sei die x_3-Spalte die Pivotspalte :

BV \ NBV	x_1	x_2	y_2	x_4	rechte Seite	(*)
y_1	0	0	-1	1	1	
x_3	1	1	1	1	4	
c	0	0	1	0	4	

$\Rightarrow$ Minimalstelle in $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (0{,}0{,}4{,}0)$ mit dem Zielfunktionswert $Q_{\min} = -4$, bzw. $Q_{\max} = 4$.

- Sei die x_4-Spalte die Pivotspalte :

BV \ NBV	x_1	x_2	x_3	y_1	rechte Seite	(*)
x_4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	5
y_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	3
c	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	

Hier sind nun wiederum 3 Möglichkeiten der Auswahl der Pivotspalte gegeben :

- Sei die x_1-Spalte die Pivotspalte :

BV \ NBV	y_2	x_2	x_3	y_1	rechte Seite	(*)
x_4	-1	0	0	1	1	
x_1	2	1	1	-1	3	
c	1	0	0	0	4	

$\Rightarrow$ Minimalstelle in $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (3,0,0,1)$ mit dem Zielfunktionswert $Q_{\min} = -4$, bzw. $Q_{\max} = 4$.

- Sei die x_2-Spalte die Pivotspalte :

BV \ NBV	x_1	y_2	x_3	y_1	rechte Seite	(*)
x_4	0	-1	0	1	1	
x_2	1	2	1	-1	3	
c	0	1	0	0	4	

$\Rightarrow$ Minimalstelle in $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (0,3,0,1)$ mit dem Zielfunktionswert $Q_{\min} = -4$, bzw. $Q_{\max} = 4$.

- Sei die x_3-Spalte die Pivotspalte :

BV \ NBV	x_1	x_2	y_2	y_1	rechte Seite	(*)
x_4	0	0	-1	1	1	
x_3	1	1	2	-1	3	
c	0	0	1	0	4	

$\Rightarrow$ Minimalstelle in $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (0,0,3,1)$ mit dem Zielfunktionswert $Q_{\min} = -4$, bzw. $Q_{\max} = 4$.

Zusammenfassung aller Lösungen :
$(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (4,0,0,0)$, $(0,4,0,0)$, $(0,0,4,0)$, $(3,0,0,1)$, $(0,3,0,1)$, $(0,0,3,1)$
jeweils mit dem Zielfunktionswert $Q_{\min} = -4$, bzw. $Q_{\max} = 4$.