Lineare Optimierung - Übung08 - Georg Kuschk , Guido Thurmann

Aufgabe 8.1 :

$Ax \geq b$
$x \geq 0$
$c^T x \to \min$ = LOP2

$\Rightarrow$ LOP2^D :
$A^T u \leq c$
$u \geq 0$
$b^T u \to \max$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Wenn die i-te Spalte von A nur nichtnegative Elemente etnhält, so auch die i-te Zeile von A^T.
Und da die i-te Komponente von c negativ ist, steht im LOP2^D in der i-ten Zeile somit :

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ki} u_k}_{\geq 0} \quad \leq \quad \underbrace{c_i}_{<0}$$

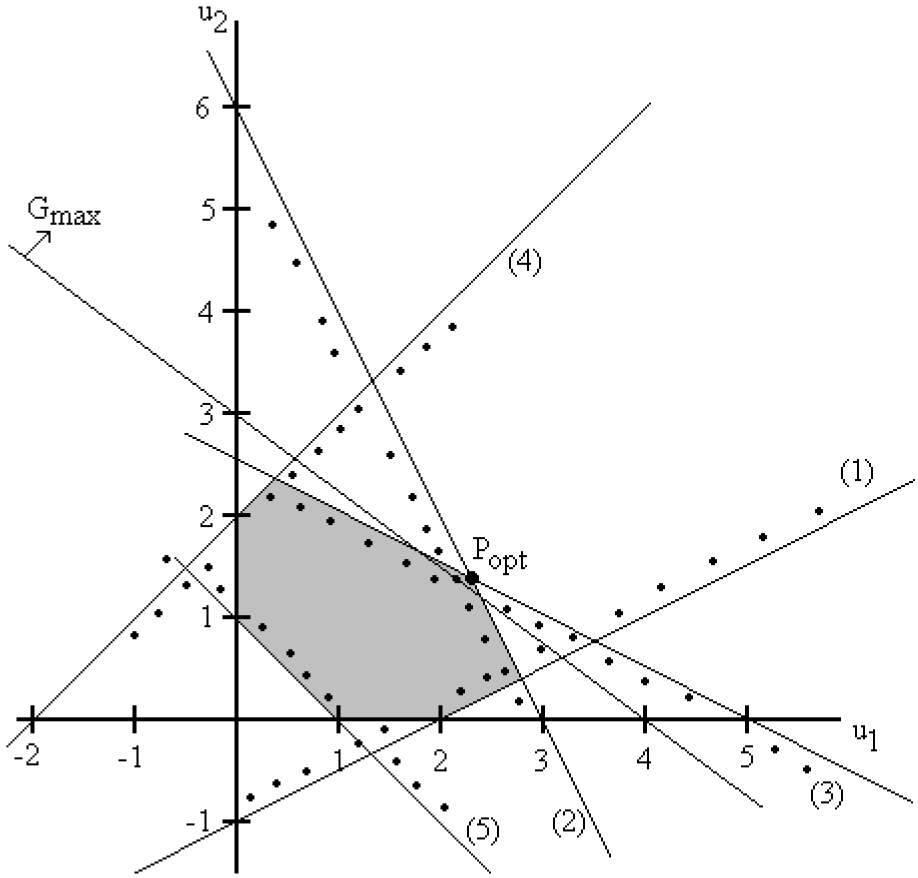
$\Rightarrow$ Widerspruch zur Vorraussetzung ($c_i < 0$)
$\Rightarrow$ zulässiger Bereich ist leer, da nach Voraussetzung in LOP2 zulässige Punkte existieren.
$\Rightarrow$ Es existiert kein endliches Minimum.

Aufgabe 8.2 :

Primal :
$2x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 - x_5 \to \min$
$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 \geq 4$
$-2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \geq 3$
$x_i \geq 0$
$c^T x \to \min \quad , \quad Ax \geq b \quad , \quad x \geq 0$

<u>Dual :</u> $4u_1 + 3u_2 \rightarrow \max$

$$
\begin{array}{llll}
u_1 - 2u_2 \le 2 & (1) & u_1 = 0 \Rightarrow u_2 \ge -1 \quad , & u_2 = 0 \Rightarrow u_1 \le 2 \\
2u_1 + u_2 \le 6 & (2) & u_1 = 0 \Rightarrow u_2 \le 6 \quad , & u_2 = 0 \Rightarrow u_1 \le 3 \\
u_1 + 2u_2 \le 5 & (3) & u_1 = 0 \Rightarrow u_2 \le 2.5 \quad , & u_2 = 0 \Rightarrow u_1 \le 5 \\
-u_1 + u_2 \le 2 & (4) & u_1 = 0 \Rightarrow u_2 \le 2 \quad , & u_2 = 0 \Rightarrow u_1 \ge -2 \\
-u_1 - u_2 \le -1 & (5) & u_1 = 0 \Rightarrow u_2 \ge 1 \quad , & u_2 = 0 \Rightarrow u_1 \ge 1 \\
u_i \ge 0 & & & \\
b^T u \rightarrow \max \quad , \quad A^T u \le c \quad , \quad u \ge 0 & & &
\end{array}
$$



$$u = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \quad , \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ ? \\ ? \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

x_2 und x_3 aus den primalen Restriktionen heraus bestimmen :

$$2x_2 + x_3 = 4$$
$$x_2 + 2x_3 = 3$$

Gauß :

2	1	4
1	2	3
1	2	3
0	-3	-2

$$\Rightarrow x_3 = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow x_2 + \frac{4}{3} = 3 \qquad \Rightarrow x_2 = \frac{5}{3}$$

D.h. $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 5/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 8.3 :

$$x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n \to \min$$

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 1 \\ x_1 + x_2 &\geq 2 \\ &\ldots \\ x_1 + \ldots + x_n &\geq n \end{aligned}$$

Primal :

$Ax \geq b \quad , \quad c^T x \to \min$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ \ldots \\ n \end{pmatrix} \quad , \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ \ldots \\ n \end{pmatrix} \quad , \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Dual :

$A^T u \leq c \quad , \quad b^T u \to \max$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ \ldots \\ n \end{pmatrix} \quad , \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ \ldots \\ n \end{pmatrix} \quad , \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \ldots \\ u_n \end{pmatrix}$$

D.h. :

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \ldots + u_n &\leq 1 && (1) \\ u_2 + \ldots + u_n &\leq 2 && (2) \\ \ldots & && \ldots \\ u_n &\leq n && (n) \end{aligned}$$

Aus (1) folgt wegen der Nicht-Negativität von u_1 , dass $u_2 + ... + u_n \le 1$ gilt.
Diese Argumentation führt sukzessive zu : $u_n \le 1$

Mit $u_i \le 1$ folgt nun :

$$b^T u \to \max \quad \hat{=} \quad u_1 + 2u_2 + ... + nu_n \to \max$$

$$\hat{=} \quad 1 + 2 + ... + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Aufgabe 8.4 :

Primal :

$$4x_1 + 14x_2 + 8x_3 \to \max$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10$$
$$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 10$$
$$x_i \ge 0$$

$$c^T x \to \max \quad , \quad Ax \le b \quad , \quad x \ge 0$$

Dual :

$$b^T u \to \min \quad , \quad A^T u \ge c \quad , \quad u \ge 0$$

$$10u_1 + 10u_2 \to \min$$
$$u_1 + 3u_2 \ge 4$$
$$2u_1 + 3u_2 \ge 14$$
$$u_1 + 2u_2 \ge 8$$

Für $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ sind sämtliche Restriktionen erfüllt, und der ZF-Wert ist 50.
Wegen $Q(x) \le G(u)$ folgt die Behauptung.