Lineare Optimierung – Übung10 - Georg Kuschk

Da ich die Aufgaben mit Mathematica gelöst habe , musste ich die Aufgaben erst auf die Form $Ax \geq b$, $x \geq 0$ bringen.
Dies erfolgte auf folgende Weise :

- Spieler R

$$x_{m+1} - x_{m+2} \to \min$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i + x_{m+1} - x_{m+2} \geq 0$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i \geq 1$$
$$\Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} & & & 1 & -1 \\ & A^T & & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & -1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ x_{m+2} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Spieler S

$y_{n+1} - y_{n+2} \to \max$ d.h. $-y_{n+1} + y_{n+2} \to \min$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + y_{n+1} - y_{n+2} \leq 0$ d.h. $\sum_{j=1}^{n} -a_{ij} y_j - y_{n+1} + y_{n+2} \geq 0$

$\sum_{j=1}^{n} y_j \leq 1$ d.h. $\sum_{j=1}^{n} -y_j \geq -1$

$$\Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} & & & -1 & 1 \\ & -A & & \vdots & \vdots \\ & & & -1 & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \\ y_{n+2} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10.1 :

Aufgabe 10.1 für Spieler R (Rainer)

In[4]:= LinearProgramming$\left[\{0, 0, 0, 0, 1, -1\}, \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 & 5 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \{0, 0, 0, 0, 1, -1\}\right]$

Out[4]= {0, 0, 0, 1, 0, 3}

Aufgabe 10.1 für Spieler S (Claudia)

In[5]:= LinearProgramming$\left[\{0, 0, 0, 0, -1, 1\}, \begin{pmatrix} -7 & -2 & -5 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -3 & -4 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & -6 & -1 & 1 \\ -5 & -3 & -4 & -4 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \{0, 0, 0, 0, -1, 1\}\right]$

Out[5]= {0, 1, 0, 0, 0, 3}

Die Optimallösung für Rainer ist also $\hat{x}^0 = (0 , 0 , 0 , 1)^T$.
Die Optimallösung für Claudia ist $\hat{y}^0 = (0 , 1 , 0 , 0)^T$.

Der Wert des Spiels ist =3, die durchschnittlich zu erwartende Übernachtungshöhe beträgt also 300Hm.

Manuelle Methode :
Für jeden der zwei Spieler die schlechtesten Elemente aus den Zeilen bzw. Spalten heraussuchen, und unter diesen die beste wählen.

Aufgabe 10.2 :

Aufgabe 10.2 für Spieler R

In[1]:= LinearProgramming$\left[\{0, 0, 1, -1\}, \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \{0, 0, 1, -1\}\right]$

Out[1]= $\left\{\frac{3}{10}, \frac{7}{10}, 0, \frac{1}{5}\right\}$

Aufgabe 10.2 für Spieler S

In[9]:= LinearProgramming$\left[\{0, 0, -1, 1\}, \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \{0, 0, -1, 1\}\right]$

Out[9]= $\left\{\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 0, \frac{1}{5}\right\}$

Die Optimallösung für R ist $\hat{x}^0 = \left(\frac{3}{10}, \frac{7}{10}\right)^T$.

Die Optimallösung für S ist $\hat{y}^0 = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)^T$.

Der Wert des Spiels ist $v = \frac{1}{5}$.

Wenn die Strategie eines Spielers gegeben ist und die Strategie des Gegenspielers gesucht ist, gibt es folgende Möglichkeiten :

- duales Problem lösen
- über komplementäre Schlupfbedingungen

Angenommen die Lösung für R sei bekannt, und die für S gesucht, dann kann man dies wiefolgt über die komplementären Schlupfbedingungen erreichen :

<u>duales Problem :</u>

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/10 \\ 7/10 \\ 0 \\ 1/5 \end{pmatrix} \qquad \text{(wegen } v = x_4 - x_3 = \frac{1}{5} \;, \;\; x_3 - x_4 \to \min \text{)}$$

Die erste Variable entspricht der ersten Ungleichung im dualen Problem usw.
Der Wert der Variablen multipliziert mit dem Schlupf muss = 0 sein.

$\Rightarrow$ Die 1. , 2. und 3. Ungleichung ist mit „=“ erfüllt.

Außerdem gilt wegen der starken Dualität $u_3 - u_4 = -\frac{1}{5}$.

$\Rightarrow$

$$3u_1 - 4u_2 - \frac{1}{5} = 0$$

$$-u_1 + 2u_2 - \frac{1}{5} = 0 \qquad \Rightarrow u_1 = 2u_2 - \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 3\left(2u_2 - \frac{1}{5}\right) - 4u_2 - \frac{1}{5} = 0$$

$$\Rightarrow 2u_2 - \frac{4}{5} = 0$$

$$\Rightarrow u_2 = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{3}{5}$$

Aufgabe 10.3 :

Aufgabe 10.3 für R

$$\text{LinearProgramming}\left[\{0, 0, 0, 0, 0, 1, -1\}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \{0, 0, 0, 0, 0, 1, -1\}\right]$$

$$\left\{\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right\}$$

Aufgabe 10.3 für S

In[3]:= $$\text{LinearProgramming}\left[\{0, 0, 0, 0, 0, -1, 1\}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \{0, 0, 0, 0, 0, -1, 1\}\right]$$

Out[3]= $$\left\{\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right\}$$

Die Optimallösung (optimale Strategie) für Spieler R ist $\hat{x}^0 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, 0\right)^T$.

Die Optimallösung (optimale Strategie) für Spieler S ist $\hat{y}^0 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, 0\right)^T$.

Die Lösungen sind identisch, da die Matrix schiefsymmetrisch ist ($A^T = -A$).

Das Spiel ist fair, da $v = 0$ ist.