Lineare Optimierung – Übung11 - Georg Kuschk

Beispiel 1 zum Transportalgorithmus :

$$a = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad , \quad c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Phase

Bestimmung einer Anfangsecke nach der Nord-West-Eckenregel :

	x_{ij}				
	3	5	1		9
			1	3	4
				2	2
	3	5	2	5	

Von links oben beginnend größtmögliche Zahlen, dabei die Zeilen- und Spaltensumme beachten.
(Die Zeilen und Spalten, bei denen die Summe bereits erfüllt ist, enthalten dann in den anderen Einträgen nur Nullen (= NichtBasisVariablen).)

Von den $n \cdot m = 4 \cdot 3 = 12$ Variablen sind $m + n - 1 = 6$ BasisVariablen.

2. Phase

	x_{ij}				
	3	5	1		9
			1	3	4
				2	2
	3	5	2	5	

	c_{ij}				
	2	***1***	***1***	3	
	3	4	***1***	***2***	
	1	1	5	***4***	

Für den Zielfunktionswert gilt hier :
$Q = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 6 + 5 + 1 + 1 + 6 + 8 = 27$

Nun werden die u_i, v_j , mit $v_n = 0$ beginnend , berechnet : $u_i + v_j = c_{ij}$.
(Diese Gleichungen müssen nur für die c_{ij} der BasisVariablen erfüllt sein.)

	c_{ij}				
	2	***1***	***1***	3	2
	3	4	***1***	***2***	2
	1	1	5	***4***	4
	0	-1	-1	0	$v_j \setminus u_i$

Jetzt erfolgt die Berechnung der c'_{ij} durch : $c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$.
(Die c'_{ij} der BasisVariablen sind immer = 0 und brauchen nicht berechnet zu werden.)

	c'_{ij}				
	0	0	0	1	2
	1	2	0	0	2
	-3	-3	0	0	4
	0	-1	-1	0	$v_j \ \backslash \ u_i$

Der Optimalitätstest (optimal $\Leftrightarrow c'_{ij} \geq 0$) ist nicht erfüllt , d.h. :

Pivotauswahl : kleinstes negatives c'_{ij}

D.h. die Variable der -3 taucht als neue BasisVariable mit dem (noch unbekannten) Wert d auf. (Dafür muss dann eine andere BasisVariable verschwinden.)
Da d neue BasisVariable wird, muss $d > 0$ sein !

	x_{ij}				
	3	5	1		
			1	3	
	d			2	

Nun noch die Zeilen- und Spaltensummen ausgleichen :

	x_{ij}				
	$3-d$	5	$1+d$		
			$1-d$	$3+d$	
	d			$2-d$	

Den Wert d nun so wählen, daß ein positiver Eintrag 0 wird, und die anderen ≥ 0 bleiben :
Dies ist für $d = 1$ der Fall.
$\Rightarrow$

	x_{ij}				
	2	5	2		
				4	
	1			1	

	c_{ij}				
	<u>***2***</u>	<u>***1***</u>	<u>***1***</u>	3	5
	3	4	1	<u>***2***</u>	2
	<u>***1***</u>	1	5	<u>***4***</u>	4
	-3	-4	-4	0	

$Q = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 4 + 5 + 2 + 8 + 1 + 4 = 24$

	c'_{ij}				
	0	0	0	-2	
	4	6	3	0	
	0	1	5	0	

Optimalitätstest weiterhin nicht erfüllt, d.h. Pivotauswahl : -2

	x_{ij}				
	$2-d$	5	2	d	
				4	
	$1+d$			$1-d$	

Wahl von $d := 1$

$\Rightarrow$

	x_{ij}				
	1	5	2	1	
				4	
	2				

	c_{ij}				
	$\underline{\boldsymbol{2}}$	$\underline{\boldsymbol{1}}$	$\underline{\boldsymbol{1}}$	$\underline{\boldsymbol{3}}$	3
	3	4	1	$\underline{\boldsymbol{2}}$	2
	$\underline{\boldsymbol{1}}$	1	5	4	2
	-1	-2	-2	0	

$Q = 2\cdot 1 + 1\cdot 5 + 1\cdot 2 + 3\cdot 1 + 2\cdot 4 + 1\cdot 2 = 2+5+2+3+8+2 = 22$

	c'_{ij}				
	0	0	0	0	
	2	4	1	0	
	0	1	5	2	

Nun ist die Optimalitätsbedingung erfüllt.
Die als Basisvariablen gekennzeichneten x_{ij} bilden die Lösung.

Lösung : $x_{11} = 1$, $x_{12} = 5$, $x_{13} = 2$, $x_{14} = 1$, $x_{24} = 4$, $x_{31} = 2$ mit $Q_{\min} = 22$.

<u>Beispiel 2 zum Transportalgorithmus :</u>

$$a = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} \quad , \quad c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 & 7 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Bestimmung einer Anfangsecke nach der NW-Eckenregel :

	x_{ij}				
	9				9
	1	12	2		15
			7	7	14
	10	12	9	7	

2. Phase :

	x_{ij}				
	9				
	1	12	2		
			7	7	

	c_{ij}				
	<u>***5***</u>	5	2	7	-1
	<u>***8***</u>	<u>***3***</u>	<u>***1***</u>	8	2
	2	4	<u>***4***</u>	<u>***5***</u>	5
	6	1	-1	0	

$Q = 45 + 8 + 36 + 2 + 28 + 35 = 154$

	c'_{ij}				
	0	5	4	8	-1
	0	0	0	6	2
	-9	-2	0	0	5
	6	1	-1	0	$v_j \ \backslash \ u_i$

Keine Optimalität , also Pivotauswahl : -9

	x_{ij}				
	9				
	$1-d$	12	$2+d$		
	d		$7-d$	7	

Wahl von $d = 1$:

	x_{ij}				
	9				
		12	3		
	1		6	7	

	c_{ij}				
	<u>***5***</u>	5	2	7	8
	8	<u>***3***</u>	<u>***1***</u>	8	2
	<u>***2***</u>	4	<u>***4***</u>	<u>***5***</u>	5
	-3	1	-1	0	

$Q = 45 + 36 + 3 + 2 + 24 + 35 = 145$

	c'_{ij}				
	0	-4	-5	-1	8
	9	0	0	6	2
	0	-2	0	0	5
	-3	1	-1	0	$v_j \setminus u_i$

Keine Optimalität , also Pivotauswahl : -5

	x_{ij}				
	$9-d$		d		
		12	3		
	$1+d$		$6-d$	7	

Wahl von $d=6$:

	x_{ij}				
	3		6		
		12	3		
	7			7	

	c_{ij}				
	5	5	***2***	7	8
	8	***3***	***1***	8	7
	2	4	4	***5***	5
	-3	-4	-6	0	

$Q = 15+12+36+3+14+35 = 115$

	c'_{ij}				
	0	1	0	-1	8
	4	0	0	1	7
	0	3	5	0	5
	-3	-4	-6	0	$v_j \setminus u_i$

Keine Optimalität , also Pivotauswahl : -1

	x_{ij}				
	$3-d$		6	d	
		12	3		
	$7+d$			$7-d$	

Wahl von $d=3$:

	x_{ij}				
			6	3	
		12	3		
	10			4	

	c_{ij}				
	5	5	***2***	***7***	7
	8	***3***	***1***	8	6
	2	4	4	***5***	5
	-3	-3	-5	0	

$Q = 12+21+36+3+20+20 = 112$

	c'_{ij}				
	1	1	0	0	7
	5	0	0	2	6
	0	2	4	0	5
	-3	-3	-5	0	$v_j \ \backslash \ u_i$

Jetzt ist die Optimalitätsbedingung erfüllt.
Lösung sind die gekennzeichneten BasisVariablen x_{ij} mit $Q_{\min} = 112$.

Aufgabe 11.1 :

$$a = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad , \quad c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

	x_{ij}				
	3	2			5
		2	2	3	7
				3	3
	3	4	2	6	

	x_{ij}				
	3	2			
		2	2	3	
				3	

	c_{ij}				
	2	**5**	1	3	0
	2	**6**	**4**	**1**	1
	1	3	1	**5**	5
	2	5	3	0	

$Q = 6 + 10 + 12 + 8 + 3 + 15 = 54$

	c'_{ij}				
	0	0	-2	3	0
	-1	0	0	0	1
	-6	-7	-7	0	5
	2	5	3	0	$v_j \ \backslash \ u_i$

Keine Optimalität , also Pivotauswahl : -7 (linke)

	x_{ij}				
	3	2			
		$2-d$	2	$3+d$	
		d		$3-d$	

Wahl von $d = 2$:

	x_{ij}				
	3	2			
			2	5	
		2		1	

	c_{ij}				
	_2_	**_5_**	1	3	7
	2	6	**_4_**	**_1_**	1
	1	**_3_**	1	**_5_**	5
	-5	-2	3	0	

$Q = 6 + 10 + 8 + 5 + 6 + 5 = 40$

	c'_{ij}				
	0	0	-9	-4	7
	6	7	0	0	1
	1	0	-9	0	5
	-5	-2	3	0	$v_j \setminus u_i$

Keine Optimalität , also Pivotauswahl : -9 (obere)

	x_{ij}				
	3	$2-d$	d		
			$2-d$	$5+d$	
		$2+d$		$1-d$	

Wahl von $d = 1$:

	x_{ij}				
	3	1	1		
			1	6	
		3			

	c_{ij}				
	_2_	**_5_**	**_1_**	3	-2
	2	6	**_4_**	**_1_**	1
	1	**_3_**	1	5	-4
	4	7	3	0	

$Q = 6 + 5 + 1 + 4 + 6 + 9 = 31$

	c'_{ij}				
	0	0	0	5	-2
	-3	-2	0	0	1
	1	0	2	9	-4
	4	7	3	0	$v_j \setminus u_i$

Keine Optimalität , also Pivotauswahl : -3

	x_{ij}				
	$3-d$	1	$1+d$		
	d		$1-d$	6	
		3			

Wahl von $d = 1$:

	x_{ij}				
	2	1	2		
	1			6	
		3			

	c_{ij}				
	<u>***2***</u>	<u>***5***</u>	<u>***1***</u>	3	1
	<u>***2***</u>	6	4	<u>***1***</u>	1
	1	<u>***3***</u>	1	5	-1
	1	4	0	0	

$Q = 4 + 5 + 2 + 2 + 6 + 9 = 28$

	c'_{ij}				
	0	0	0	2	1
	0	1	3	0	1
	1	0	2	6	-1
	1	4	0	0	$v_j \ \backslash \ u_i$

Jetzt ist die Optimalitätsbedingung erfüllt.
Lösung sind die gekennzeichneten BasisVariablen x_{ij} mit $Q_{\min} = 28$.

Aufgabe 11.2 :

$$a = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 12 \\ 16 \\ 6 \end{pmatrix} \quad , \quad c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 8 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 6 \\ 8 & 3 & 4 & 8 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$a =$ Lagerstellen , $b =$ Verbraucher

Bestimmung einer Anfangsecke nach der NW-Eckenregel :

			x_{ij}			
	10	8	2			20
			10	10		20
				6	4	10
					2	6
	10	8	12	16	6	

Nicht gesättigt, also einen zusätzlichen Verbaucher einführen.
(In Realität würden die Güter, welche an diesen Verbraucher geliefert werden, im Lager verbleiben. Die zugehörigen Transportkosten werden auf 0 gesetzt.)
$\Rightarrow$ Anfangsecke :

			x_{ij}				
	10	8	2				
			10	10			
				6	4		
					2	4	

			c_{ij}				
	5	***5***	***8***	4	2	0	-2
	3	4	***5***	***7***	6	0	-5
	8	3	4	***8***	***1***	0	-4
	2	5	8	6	***5***	***0***	0
	7	7	10	12	5	0	$v_j \setminus u_i$

$Q = 50 + 40 + 16 + 50 + 70 + 48 + 4 + 10 = 288$

			c'_{ij}				
	0	0	0	-6	-1	2	
	1	2	0	0	6	5	
	5	0	-2	0	0	4	
	-5	-2	-2	-6	0	0	

Keine Optimalität , also Pivotauswahl : -6 (obere)

			x_{ij}				
	10	8	$2-d$	d			
			$10+d$	$10-d$			
				6	4		
					2	4	

Wahl von $d = 2$:

			x_{ij}				
	10	8		2			
			12	8			
				6	4		
					2	4	

			c_{ij}				
	$\underline{\boldsymbol{5}}$	$\underline{\boldsymbol{5}}$	8	$\underline{\boldsymbol{4}}$	2	0	-8
	3	4	$\underline{\boldsymbol{5}}$	$\underline{\boldsymbol{7}}$	6	0	-5
	8	3	4	$\underline{\boldsymbol{8}}$	$\underline{\boldsymbol{1}}$	0	-4
	2	5	8	6	$\underline{\boldsymbol{5}}$	$\underline{\boldsymbol{0}}$	0
	13	13	10	12	5	0	$v_j \ \backslash \ u_i$

$Q = 50 + 40 + 8 + 60 + 56 + 48 + 4 + 10 = 276$

			c'_{ij}				
	0	0	6	0	5	8	
	-5	-4	0	0	6	5	
	-1	-6	-2	0	0	4	
	-11	-8	-2	-6	0	0	

Keine Optimalität , also Pivotauswahl : -11

			x_{ij}				
	$10-d$	8		$2+d$			
			12	8			
				$6-d$	$4+d$		
	d				$2-d$	4	

Wahl von $d = 2$:

		x_{ij}				
8	8		4			
		12	8			
			4	6		
2					4	

		c_{ij}				
5	***5***	8	***4***	2	0	3
3	4	***5***	***7***	6	0	6
8	3	4	***8***	***1***	0	7
2	5	8	6	5	***0***	0
2	2	-1	1	-6	0	$v_j \setminus u_i$

$Q = 40 + 40 + 16 + 60 + 56 + 32 + 6 + 4 = 254$

		c'_{ij}				
0	0	6	0	5	-3	
-5	-4	0	0	6	-6	
-1	-6	-2	0	0	-7	
0	3	9	5	11	0	

Keine Optimalität , also Pivotauswahl : -7

		x_{ij}				
$8-d$	8		$4+d$			
		12	8			
			$4-d$	6	d	
$2+d$					$4-d$	

Wahl von $d = 4$:

		x_{ij}				
4	8		8			
		12	8			
				6	4	
6					0	

(Zwei BasisVariablen wurden 0.)

		c_{ij}				
5	***5***	8	***4***	2	0	3
3	4	***5***	***7***	6	0	6
8	3	4	8	***1***	***0***	0
2	5	8	6	5	***0***	0
2	2	-1	1	1	0	$v_j \setminus u_i$

$Q = 20 + 40 + 32 + 60 + 56 + 6 + 12 = 226$

			c'_{ij}				
	0	0	6	0	-2	-3	
	-5	-4	0	0	-1	-6	
	6	1	5	7	0	0	
	0	3	9	5	4	0	

Keine Optimalität , also Pivotauswahl : -6

			x_{ij}				
	$4-d$	8		$8+d$			
			12	$8-d$		d	
					6	4	
	$6+d$					$0-d$	

Wahl von $d = 0$:

			x_{ij}				
	4	8		8			
			12	8		0	
					6	4	
	6						

			c_{ij}				
	5	**5**	8	**4**	2	0	-3
	3	4	**5**	**7**	6	**0**	0
	8	3	4	8	**1**	**0**	0
	2	5	8	6	5	0	-6
	8	8	5	7	1	0	$v_j \ \backslash \ u_i$

$Q = 20 + 40 + 32 + 60 + 56 + 6 + 12 = 226$

			c'_{ij}				
	0	0	6	0	4	3	
	-5	-4	0	0	5	0	
	0	-5	-1	1	0	0	
	0	3	9	5	10	6	

Keine Optimalität , also Pivotauswahl : -5 (oben links)

	x_{ij}						
	$4-d$	8		$8+d$			
	d		12	$8-d$		0	
					6	4	
	6						

Wahl von $d = 4$:

	x_{ij}						
		8		12			
	4		12	4		0	
					6	4	
	6						

	c_{ij}						
	5	$\underline{\boldsymbol{5}}$	8	$\underline{\boldsymbol{4}}$	2	0	-3
	$\underline{\boldsymbol{3}}$	4	$\underline{\boldsymbol{5}}$	$\underline{\boldsymbol{7}}$	6	$\underline{\boldsymbol{0}}$	0
	8	3	4	8	$\underline{\boldsymbol{1}}$	$\underline{\boldsymbol{0}}$	0
	$\underline{\boldsymbol{2}}$	5	8	6	5	0	-1
	3	8	5	7	1	0	$v_j \setminus u_i$

$Q = 40 + 48 + 12 + 60 + 28 + 6 + 12 = 206$

	c'_{ij}						
	5	0	6	0	4	3	
	0	-4	0	0	5	0	
	5	-5	-1	1	0	0	
	0	-2	4	0	5	1	

Keine Optimalität , also Pivotauswahl : -5

	x_{ij}						
		$8-d$		$12+d$			
	4		12	$4-d$		$0+d$	
		d			6	$4-d$	
	6						

Wahl von $d = 4$:

			x_{ij}				
		4		16			
	4		12	0		4	
		4			6		
	6						

			c_{ij}				
	5	$\underline{\boldsymbol{5}}$	8	$\underline{\boldsymbol{4}}$	2	0	-3
	$\underline{\boldsymbol{3}}$	4	$\underline{\boldsymbol{5}}$	$\underline{\boldsymbol{7}}$	6	$\underline{\boldsymbol{0}}$	0
	8	$\underline{\boldsymbol{3}}$	4	8	$\underline{\boldsymbol{1}}$	0	-5
	$\underline{\boldsymbol{2}}$	5	8	6	5	0	-1
	3	8	5	7	6	0	$v_j \setminus u_i$

$Q = 20 + 64 + 12 + 60 + 12 + 6 + 12 = 186$

			c'_{ij}				
	5	0	6	0	-1	3	
	0	-4	0	0	0	0	
	10	0	4	6	0	5	
	0	-2	4	0	0	1	

Keine Optimalität , also Pivotauswahl : -4

			x_{ij}				
		$4-d$		$16+d$			
	4	d	12	$0-d$		4	
		4			6		
	6						

Wahl von $d = 0$:

			x_{ij}				
		4		16			
	4	0	12			4	
		4			6		
	6						

			c_{ij}				
	5	$\underline{\boldsymbol{5}}$	8	$\underline{\boldsymbol{4}}$	2	0	1
	$\underline{\boldsymbol{3}}$	$\underline{\boldsymbol{4}}$	$\underline{\boldsymbol{5}}$	7	6	$\underline{\boldsymbol{0}}$	0
	8	$\underline{\boldsymbol{3}}$	4	8	$\underline{\boldsymbol{1}}$	0	-1
	$\underline{\boldsymbol{2}}$	5	8	6	5	0	-1
	3	4	5	3	2	0	$v_j \setminus u_i$

$Q = 20 + 64 + 12 + 60 + 12 + 6 + 12 = 186$

	c'_{ij}						
	1	0	2	0	-1	-1	
	0	0	0	4	4	0	
	6	0	0	6	0	1	
	0	2	4	4	4	1	

Keine Optimalität , also Pivotauswahl : -1 (linke)

	x_{ij}						
		$4-d$		16	d		
	4	0	12			4	
		$4+d$			$6-d$		
	6						

Wahl von $d = 4$:

	x_{ij}						
				16	4	4	
	4	0	12				
		8			2		
	6						

	c_{ij}						
	5	5	8	$\underline{\boldsymbol{4}}$	$\underline{\boldsymbol{2}}$	$\underline{\boldsymbol{0}}$	0
	$\underline{\boldsymbol{3}}$	$\underline{\boldsymbol{4}}$	$\underline{\boldsymbol{5}}$	7	6	0	0
	8	$\underline{\boldsymbol{3}}$	4	8	$\underline{\boldsymbol{1}}$	0	-1
	$\underline{\boldsymbol{2}}$	5	8	6	5	0	-1
	3	4	5	4	2	0	$v_j \ \backslash \ u_i$

$Q = 64 + 8 + 12 + 60 + 24 + 2 + 12 = 182$

	c'_{ij}						
	2	1	3	0	0	0	
	0	0	0	3	4	0	
	6	0	0	5	0	1	
	0	0	4	3	4	1	

Endlich Optimalität , wurde ja auch Zeit!

Lösung :

$$x_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 16 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 12 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 8 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 6 & 0 \\ 8 & 3 & 4 & 8 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $Q_{\min} = 182$.

Aufgabe 11.3 :

Ein Zwischenlager kann sowohl zu- und abtransportieren, also einführen als „Fabrik“ **und** „Abnehmer“.

$$\Rightarrow \qquad c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 & 7 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 1 & 8 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 0 & 100 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 100 & 0 \end{pmatrix}$$

Zwischen den beiden Zwischenlagern soll nichts transportiert werden, also einfach im Vergleich sehr hohe Transportkosten definieren.

$$a = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 14 \\ 10 \\ 50 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 9 \\ 7 \\ 10 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Bestimmung einer Anfangsecke :

	x_{ij}						
	9						9
	1	12	2				15
			7	7	0		14
					10	0	10
						50	50
	10	12	9	7	10	50	

$m + n - 1 = 5 + 6 - 1 = 10$ Basisvariablen

	c_{ij}						
	5	5	2	7	1	1	95
	8	***3***	***1***	8	2	1	98
	2	4	***4***	***5***	***1***	2	101
	2	1	3	4	***0***	***100***	100
	1	2	1	3	100	***0***	0
	-90	-95	-97	-96	-100	0	$v_j \;\backslash\; u_i$

$Q = 45 + 8 + 36 + 2 + 28 + 35 = 154$

	c'_{ij}						
	0	5	4	8	6	-94	95
	0	0	0	6	4	-97	98
	-9	-2	0	0	0	-99	101
	-8	-4	0	0	0	0	100
	91	97	98	99	200	0	0
	-90	-95	-97	-96	-100	0	$v_j \;\backslash\; u_i$

Keine Optimalität , also Pivotauswahl : -99

	x_{ij}						
	9						9
	1	12	2				15
			7	7	$0-d$	d	14
					$10+d$	$0-d$	10
						50	50
	10	12	9	7	10	50	

Wahl von $d = 0$:

	x_{ij}						
	9						
	1	12	2				
			7	7	0	0	
					10		
						50	

	c_{ij}						
	5	5	2	7	1	1	-4
	8	***3***	***1***	8	2	1	-1
	2	4	***4***	***5***	***1***	***2***	2
	2	1	3	4	***0***	100	1
	1	2	1	3	100	***0***	0
	9	4	2	3	-1	0	$v_j \;\backslash\; u_i$

$Q = 45 + 8 + 36 + 2 + 28 + 35 = 154$

	c'_{ij}						
	0	5	4	8	6	5	
	0	0	0	6	4	2	
	-9	-2	0	0	0	0	
	-8	-4	0	0	0	99	
	-8	-2	-1	0	101	0	
							$v_j \ \backslash \ u_i$

Keine Optimalität , also Pivotauswahl : -9

	x_{ij}						
	9						
	$1-d$	12	$2+d$				
	d		$7-d$	7	0	0	
					10		
						50	

Wahl von $d = 1$:

	x_{ij}						
	9						
		12	3				
	1		6	7	0	0	
					10		
						50	

	c_{ij}						
	$\underline{\boldsymbol{5}}$	5	2	7	1	1	5
	8	$\underline{\boldsymbol{3}}$	$\underline{\boldsymbol{1}}$	8	2	1	-1
	$\underline{\boldsymbol{2}}$	4	$\underline{\boldsymbol{4}}$	$\underline{\boldsymbol{5}}$	$\underline{\boldsymbol{1}}$	$\underline{\boldsymbol{2}}$	2
	2	1	3	4	$\underline{\boldsymbol{0}}$	100	1
	1	2	1	3	100	$\underline{\boldsymbol{0}}$	0
	0	4	2	3	-1	0	$v_j \ \backslash \ u_i$

$Q = 45 + 36 + 3 + 2 + 24 + 35 = 145$

	c'_{ij}						
	0	-4	-5	-1	-3	-4	
	9	0	0	6	4	2	
	0	-2	0	0	0	0	
	1	-4	0	0	0	99	
	1	-2	-1	0	101	0	
							$v_j \ \backslash \ u_i$

Keine Optimalität , also Pivotauswahl : -5

			x_{ij}				
	$9-d$		d				
		12	3				
	$1+d$		$6-d$	7	0	0	
					10		
						50	

Wahl von $d=6$:

			x_{ij}				
	4		6				
		12	3				
	7			7	0	0	
					10		
						50	

			c_{ij}				
	5	5	***2***	7	1	1	5
	8	***3***	***1***	8	2	1	4
	2	4	4	***5***	***1***	***2***	2
	2	1	3	4	***0***	100	1
	1	2	1	3	100	***0***	0
	0	-1	-3	3	-1	0	$v_j \setminus u_i$

$Q=20+12+36+3+14+35=120$

			c'_{ij}				
	0	1	0	-1	-3	-4	
	4	0	0	1	-1	-3	
	0	3	5	0	0	0	
	1	1	5	0	0	99	
	1	3	4	0	101	0	
							$v_j \setminus u_i$

Keine Optimalität , also Pivotauswahl : -4

			x_{ij}				
	$4-d$		6			d	
		12	3				
	$7+d$			7	0	$0-d$	
					10		
						50	

Wahl von $d=0$:

	x_{ij}						
	4		6			0	
		12	3				
	7			7	0		
					10		
						50	

	c_{ij}						
	5	5	***2***	7	1	***1***	1
	8	***3***	***1***	8	2	1	0
	2	4	4	***5***	***1***	2	-2
	2	1	3	4	***0***	100	-3
	1	2	1	3	100	***0***	0
	4	3	1	7	3	0	$v_j \ \backslash \ u_i$

$Q = 20 + 12 + 36 + 3 + 14 + 35 = 120$

	c'_{ij}						
	0	1	0	-1	-3	0	
	4	0	0	1	-1	1	
	0	3	5	0	0	4	
	1	1	5	0	0	103	
	-3	-1	0	-4	97	0	
							$v_j \ \backslash \ u_i$

Keine Optimalität , also Pivotauswahl : -4

	x_{ij}						
	$4-d$		6			$0+d$	
		12	3				
	$7+d$			$7-d$	0		
					10		
				d		$50-d$	

Wahl von $d = 4$:

	x_{ij}						
			6			4	
		12	3				
	11			3	0		
					10		
				4		46	

		c_{ij}				
5	5	***2***	7	1	***1***	1
8	***3***	***1***	8	2	1	0
2	4	4	***5***	***1***	2	2
2	1	3	4	***0***	100	1
1	2	1	***3***	100	***0***	0
0	3	1	3	-1	0	$v_j \ \backslash \ u_i$

$Q = 12 + 4 + 36 + 3 + 22 + 15 + 12 = 104$

		c'_{ij}				
4	1	0	3	1	0	
8	0	0	5	3	1	
0	-1	1	0	0	0	
1	-3	1	0	0	99	
1	-1	0	0	101	0	
						$v_j \ \backslash \ u_i$

Keine Optimalität , also Pivotauswahl : -3

		x_{ij}				
		$6-d$			$4+d$	
	$12-d$	$3+d$				
11			$3-d$	$0+d$		
	d			$10-d$		
			$4+d$		$46-d$	

Wahl von $d = 3$:

		x_{ij}				
		3			7	
	9	6				
11				3		
	3			7		
			7		43	

		c_{ij}				
5	5	***2***	7	1	***1***	1
8	***3***	***1***	8	2	1	0
2	4	4	5	***1***	2	-1
2	***1***	3	4	***0***	100	-2
1	2	1	***3***	100	***0***	0
3	3	1	3	2	0	$v_j \ \backslash \ u_i$

$Q = 6 + 7 + 27 + 6 + 22 + 3 + 3 + 21 = 95$

			c'_{ij}				
	1	1	0	3	-2	0	
	5	0	0	5	0	1	
	0	2	4	3	0	3	
	1	0	4	3	0	102	
	-2	-1	0	0	98	0	
							$v_j \setminus u_i$

Keine Optimalität , also Pivotauswahl : -2 (links unten)

			x_{ij}				
			$3-d$			$7+d$	
		$9-d$	$6+d$				
	$11-d$				$3+d$		
		$3+d$			$7-d$		
	d			7		$43-d$	

Wahl von $d = 3$:

			x_{ij}				
						10	
		6	9				
	8				6		
		6			4		
	3			7		40	

			c_{ij}				
	5	5	2	7	1	***1***	1
	8	***3***	***1***	8	2	1	2
	2	4	4	5	***1***	2	1
	2	***1***	3	4	***0***	100	0
	1	2	1	***3***	100	***0***	0
	1	1	-1	3	0	0	$v_j \setminus u_i$

$Q = 10 + 18 + 9 + 16 + 6 + 6 + 3 + 21 = 89$

			c'_{ij}				
	3	3	2	3	0	0	
	5	0	0	3	0	-1	
	0	2	4	1	0	1	
	1	0	4	1	0	100	
	0	1	2	0	100	0	
							$v_j \setminus u_i$

Keine Optimalität , also Pivotauswahl : -1

		x_{ij}				
					10	
	$6-d$	9			d	
$8-d$				$6+d$		
	$6+d$			$4-d$		
$3+d$			7		$40-d$	

Wahl von $d = 4$:

		x_{ij}				
					10	
	2	9			4	
4				10		
	10					
7			7		36	

		c_{ij}				
5	5	2	7	1	**1**	1
8	**3**	**1**	8	2	**1**	1
2	4	4	5	**1**	2	1
2	**1**	3	4	0	100	-1
1	2	1	**3**	100	**0**	0
1	2	0	3	0	0	$v_j \setminus u_i$

$Q = 10 + 6 + 9 + 4 + 8 + 10 + 10 + 7 + 21 = 85$

		c'_{ij}				
3	2	1	3	0	0	
6	0	0	4	1	0	
0	1	3	1	0	1	
2	0	4	2	1	101	
0	0	1	0	100	0	
						$v_j \setminus u_i$

Optimalität , mit der gekennzeichneten Lösung.

Nun müsste man noch das Originalproblem lösen und die Kosten vergeleichen.

<u>Andere Möglichkeit :</u>
Lösung des Originalproblems und diese Lösung dann als Anfangslösung für das erweiterte Problem nehmen.